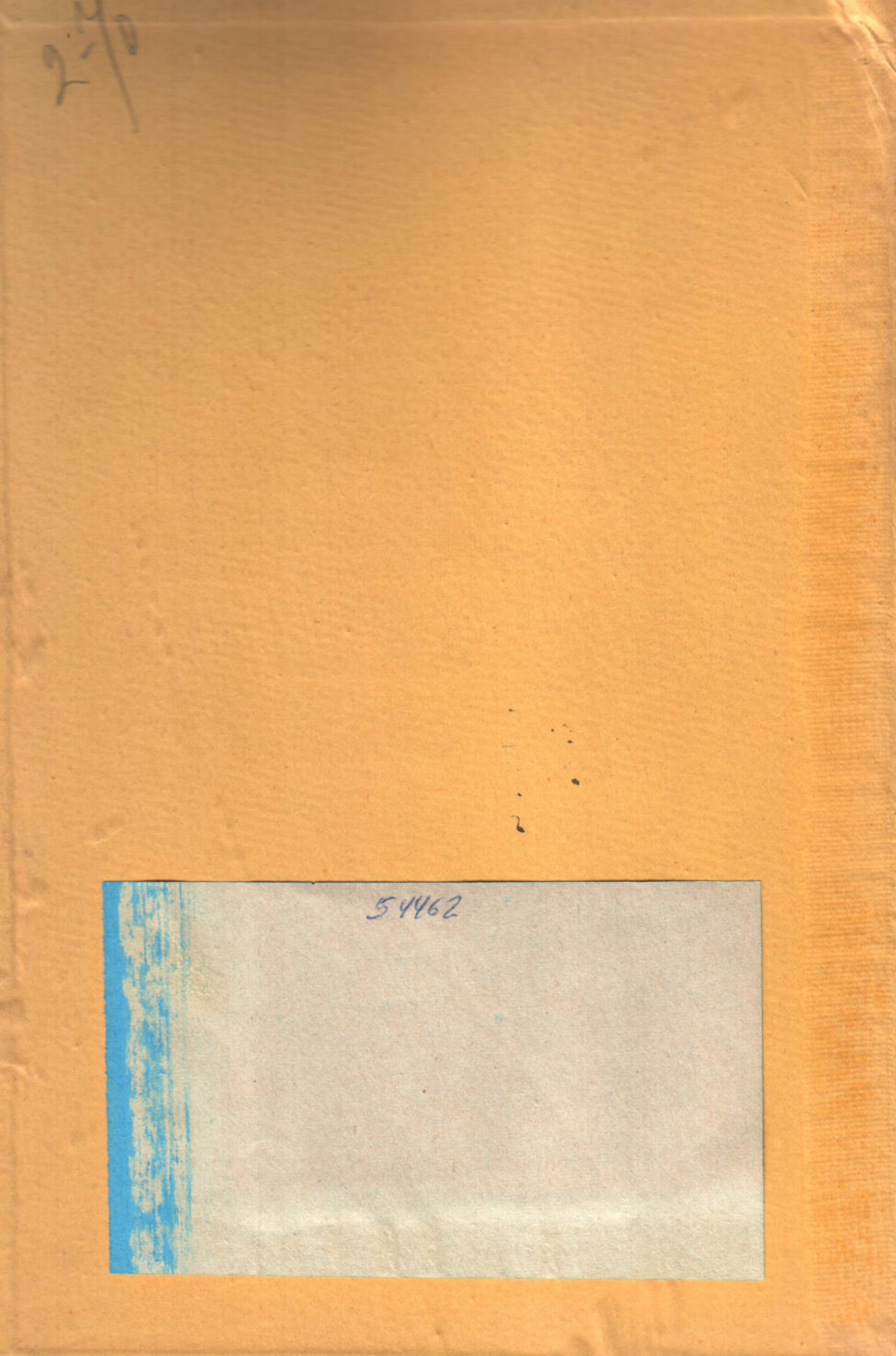
Проф. И. В. Мещерскій.

Курсъ теоретической механики.

Часть II-ая.

Изданіе
Кассы Взаимопомощи Студентовъ Политехническаго Института
Императора Петра Великаго.


54462


N86

531
М-56

Изданіе Кассы Взаимопомощи Студентовъ Петроградскаго Политехническаго Института

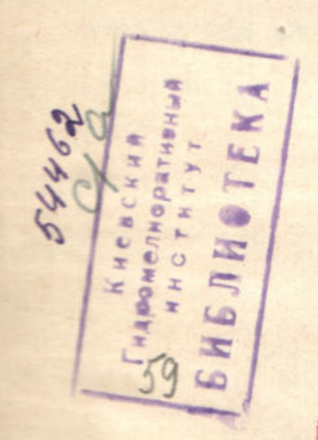
Императора Петра Великаго.



КУРСЪ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ



проф. И. В. МЕЩЕРСКАГО.



ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Петроградъ.

Типо-Литографія И. Трофимова, Можайская ул., д. № 3.

1915.

КИНЕМАТИКА.

Дополненія къ первой части курса (*см. Курсъ Теоретической Механики, часть I, изданіе 1914 г. Кинематика, стр. 119-160*).

КИНЕМАТИКА

ГЛАВА I.

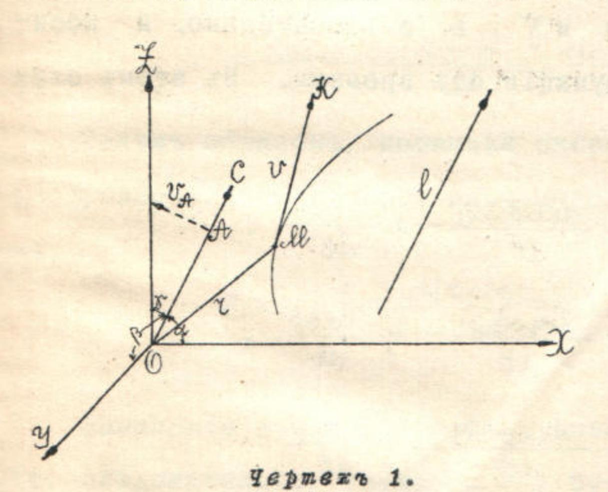
СКОРОСТЬ ТОЧКИ.

*Дополненія *).*

§ 1.

Выведемъ выраженія для проекцій скорости точки на какую-угодно ось.

При этомъ могутъ представиться два случая: *первый*, когда ось, на которую мы проектируемъ, сохраняетъ неизмѣнное направленіе въ пространствѣ; *второй*, когда направленіе оси измѣняется съ теченіемъ времени. Пустъ $MK=v$ будетъ скорость движущейся точки M, (черт. 1). Проводимъ изъ начала координатъ прямую OC параллельную данной оси l; три угла α, β, γ, которые прямая OC образуетъ съ осями координатъ, опредѣляютъ направленіе



Чертежъ 1.

---

*) *Курсъ Теоретической Механики, часть I, Кинематика, стр. 128-137. Изд. 1914 г.*

оси проекцій l .

Проекція скорости v на ось l равна:

$$v\cdot\cos(v,l) = \frac{dx}{dt}\cdot\cos\alpha + \frac{dy}{dt}\cos\beta + \frac{dz}{dt}\cdot\cos\gamma.$$

Преобразованіе этой формулы производится въ каждомъ изъ двухъ вышеуказанныхъ случаевъ отдѣльно.

Первый случай. Когда ось l *не измѣняетъ* своего направленія въ пространствѣ, углы α , β , γ постоянны, поэтому косинусы ихъ можемъ ввести подъ знакъ производной, получаемъ:

$$v\cdot\cos(v,l) = \frac{d(x\cdot\cos\alpha)}{dt} + \frac{d(y\cdot\cos\beta)}{dt} + \frac{d(z\cdot\cos\gamma)}{dt} = \frac{d(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)}{dt} = \frac{d[r\cdot\cos(r,l)]}{dt}$$

гдѣ r радіусъ-векторъ точки M.

$$v\cdot\cos(v,l) = \frac{d[r\cdot\cos(r,l)]}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Второй случай. Когда направленіе оси l съ теченіемъ времени *измѣняется*, углы α , β и γ , а, слѣдовательно, и косинусы ихъ будутъ нѣкоторыя функціи отъ времени. Въ этомъ случаѣ можемъ написать:

$$\frac{dx}{dt}\cdot\cos\alpha = \frac{d(x\cdot\cos\alpha)}{dt} - x\frac{d\cos\alpha}{dt} ,$$

$$\frac{dy}{dt}\cdot\cos\beta = \frac{d(y\cdot\cos\beta)}{dt} - y\frac{d\cos\beta}{dt} ,$$

$$\frac{dz}{dt}\cdot\cos\gamma = \frac{d(z\cdot\cos\gamma)}{dt} - z\frac{d\cos\gamma}{dt} .$$

Такимъ образомъ:

$$v\cdot\cos(v,l) = \frac{d(x\cdot\cos\alpha)}{dt} + \frac{d(y\cos\beta)}{dt} + \frac{d(z\cos\gamma)}{dt} - \left(x\frac{d\cos\alpha}{dt} + y\frac{d\cos\beta}{dt} + z\frac{d\cos\gamma}{dt}\right) =$$

$$= \frac{d[r\cdot\cos(r,l)]}{dt} - \left(x\frac{d\cos\alpha}{dt} + y\frac{d\cos\beta}{dt} + z\frac{d\cos\gamma}{dt}\right).$$

Преобразуемъ второй членъ въ правой части послѣдняго равенства. Отложимъ отъ начала координатъ по линіи OC длину OA, равную единицѣ длины; при движеніи оси l будетъ двигаться и точка A; скорость этой точки обозначимъ черезъ v_A. Такъ какъ радіусъ-векторъ точки A равенъ единицѣ, то координаты ея будутъ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, слѣдовательно, выраженія:

$$\frac{d\cos\alpha}{dt}, \frac{d\cos\beta}{dt}, \frac{d\cos\gamma}{dt},$$

представляютъ проекціи скорости точки A на координатныя оси, такъ что

$$\frac{d\cos\alpha}{dt} = v_A \cdot \cos(v_A, X),$$

$$\frac{d\cos\beta}{dt} = v_A \cdot \cos(v_A, Y),$$

$$\frac{d\cos\gamma}{dt} = v_A \cdot \cos(v_A, Z).$$

а тогда

$$x\frac{d\cos\alpha}{dt} + y\frac{d\cos\beta}{dt} + z\frac{d\cos\gamma}{dt} = r \cdot v_A \cdot \cos(r, v_A).$$

Такимъ образомъ, проекція скорости на какую-угодно ось (l), направленіе которой измѣняется съ теченіемъ времени, равна:

$$v \cdot \cos(v, l) = \frac{d[r \cdot \cos(r, l)]}{dt} - r \cdot v_A \cdot \cos(r, v_A) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Замѣчаніе 1-ое. Скорость всегда перпендикулярна къ OA, (а, слѣдовательно, также $v_A \perp l$) потому что точка A движется, вообще говоря, по поверхности шара, - въ частномъ случаѣ по окружности круга, - съ центромъ въ началѣ координатъ.

Замѣчаніе 2-ое. Формула (1) представляетъ частный случай формулы (2): когда ось сохраняетъ неизмѣнное направленіе въ пространствѣ, $v_A = 0$, и второй членъ правой части формулы (2)

обращается въ нуль.-

§ 2. *Приложенiе выведенныхъ формулъ.*

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ о движенiи точки въ плоскости удобно вмѣсто прямолинейныхъ координатъ ввести *координаты полярныя.*

Найдемъ *выраженiя проекцiй скорости точки* M *на радiусъ-векторъ* OM *или его продолженiе* OB *и на перпендикуляръ* MC, *возстановленный къ радiусу-вектору въ ту сторону, въ которую уголъ* φ *возрастаетъ* (черт.2); получимъ:

$$v\cdot\cos(v, OB) = r' \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$v\cdot\cos(v, MC) = r\cdot\varphi' \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)^{*)}$$

Если движенiе точки извѣстно въ полярныхъ координатахъ, т.е., если дано:

$$r = f_1(t),$$

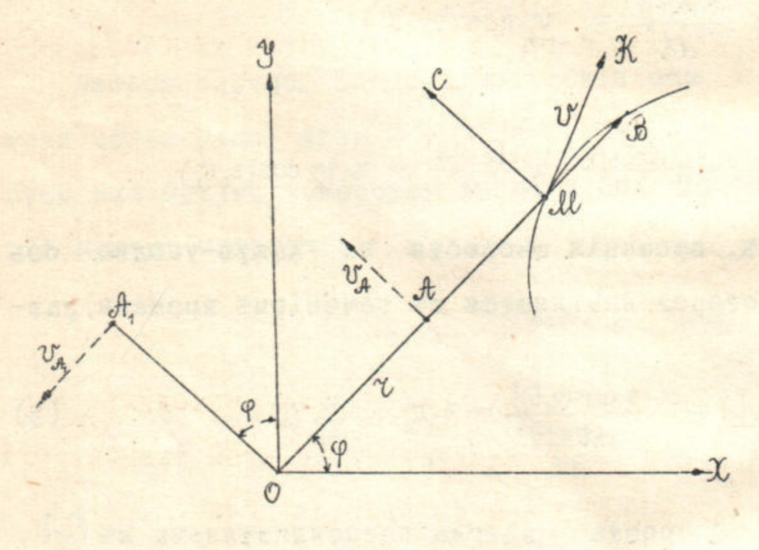
$$\varphi = f_2(t),$$

то находимъ:

$$r' = f_1'(t),$$

$$\varphi' = f_2'(t),$$

и подставляемъ въ формулы (3) и (4).



Чертежъ 2.

Если же движенiе задано въ прямолинейныхъ координатахъ, то сначала переходимъ къ поляр-

---

*) *Какъ и въ первой части, полныя производныя по времени обозначаемъ значками, поставленными наверху справа: первую производную однимъ значкомъ* ', *вторую производную двумя значками* ''

нымъ, пользуясь извѣстными формулами:

$$x = r\cdot\cos\varphi \quad , \quad y = r\cdot\sin\varphi .$$

Выводъ формулы (3). Такъ какъ радіусъ-векторъ OM, на который мы проектируемъ, измѣняетъ свое направленіе, то пользуемся формулами (2):

$$v\cdot\cos(v, OM) = \frac{d[r\cos(r,OM)]}{dt} - r\cdot v_A\cdot\cos(r, v_A),$$

гдѣ v_A есть скорость точки A, лежащей на OM и отстоящей отъ начала координатъ на единицу длины.

$$\cos(r, OM) = 1 .$$

Слѣдовательно, первый членъ въ правой части послѣдняго равенства обращается въ

$$\frac{dr}{dt}$$

На основаніи замѣчанія 1-го (§ 1, стр.7), скорость $v_A \perp OA$ слѣдовательно:

$$\cos(r, v_A) = 0,$$

а потому второй членъ обращается въ нуль. Такимъ образомъ

$$v\cos(v, OM) = \frac{dr}{dt} = r' .$$

Выводъ формулы (4). Изъ начала координатъ проводимъ прямую, параллельную оси MC, и откладываемъ на этой прямой отъ начала координатъ длину OA_1, равную единицѣ длины.

Воспользуемся опять формулой (2).

$$v\cdot\cos(v, MC) = \frac{d[r\cdot\cos(r,MC)]}{dt} - r\cdot v_{A_1}\cos(r, v_{A_1}),$$

гдѣ v_{A_1} есть скорость точки A_1.

По условію $MC \perp r$, слѣдовательно,

$$\cos(r, MC) = 0\ ;$$

а потому первый членъ послѣдняго равенства обращается въ нуль. На основанiи замѣчанiя 1-го (§ 1, стр. 7), скорость $v_{A_1} \perp OA_1$, слѣдовательно, $v_{A_1} \parallel r$, но направлена въ противоположную сторону; поэтому

$$\cos(r, v_{A_1}) = -1,$$

$$\angle(OA_1, OY) = \varphi.$$

Длина дуги, которую описываетъ точка A_1, тоже равна φ, такъ какъ радiусъ этой дуги равенъ единицѣ, слѣдовательно, скорость $v_{A_1} = \varphi'$. Такимъ образомъ:

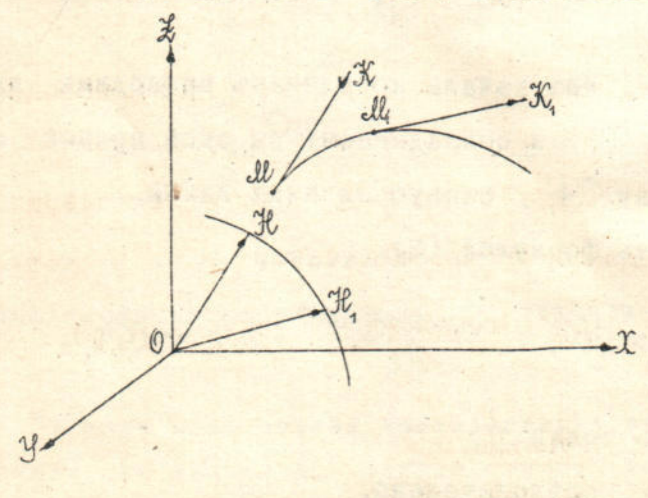
$$v \cdot \cos(v, MC) = -r \cdot \varphi'(-1) = r \cdot \varphi'.$$

На основанiи формулъ (3) и (4), *величина скорости* въ полярныхъ координатахъ выразится формулой:

$$v = \sqrt{r'^2 + r^2\varphi'^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

§ 3. *Годографъ скорости.*

Точка M, описывая траекторiю, имѣетъ скорость, которая съ теченiемъ времени измѣняется, вообще говоря, и по величинѣ и по направленiю. Чтобы имѣть *наглядное* представленiе объ измѣненiи величины и направленiя скорости точки, проводимъ изъ начала координатъ прямыя, равныя и параллельныя скоростямъ движущейся точ-



Чертежъ 3.

ки: $OH \# MK$, $OH_1 \# M_1K_1$, и т.д. (черт.3).

Линія, представляющая геометрическое мѣсто точекъ $H, H_1, \ldots$ называется *годографомъ скорости* точки M .

Когда движеніе *плоское*, годографъ будетъ кривая *плоская*. Если дано $x=f_1(t), y=f_2(t)$, то уравненіе годографа можно получить слѣдующимъ образомъ: пусть координаты точки H будутъ x_1 и y_1 :

$$x_1 = OH \cdot \cos(OH, OX),$$

$$y_1 = OH \cdot \cos(OH, OY).$$

Но OH по величинѣ и направленію равна скорости MK ; слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{dx}{dt} = f_1'(t), \\ y_1 &= \frac{dy}{dt} = f_2'(t). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Такимъ образомъ, зная движеніе точки, мы легко составимъ дифференцированіемъ по времени выраженія для перемѣнныхъ координатъ точки годографа. - Исключая t изъ найденныхъ двухъ уравненій (α) , получимъ уравненіе годографа

$$F(x_1, y_1) = 0.$$

Если движеніе точки *не плоское*, то и годографъ вообще кривая *не плоская*.

Если дано: $x=f_1(t)$; $y=f_2(t)$; $z=f_3(t)$; и если перемѣнныя координаты точки годографа обозначимъ черезъ x_1 , y_1 , z_1 , то

$$x_1 = \frac{dx}{dt} = f_1'(t),$$

$$y_1 = \frac{dy}{dt} = f_2'(t),$$

$$z_1 = \frac{dz}{dt} = f_3'(t).$$

Исключая t изъ этихъ уравненій, получимъ два уравненія годографа:

$$y_1 = F_1(x_1),$$
$$z_1 = F_2(x_1).$$

Примѣчаніе. Можно строить годографъ скорости точки, проводя изъ любой неподвижной точки, хотя бы и не лежащей въ началѣ координатъ, прямыя, параллельныя скоростямъ, но не равныя имъ, а только пропорціональныя.

Простѣйшіе случаи.

1. Если движеніе прямолинейное и равномѣрное, годографъ скорости - точка.

2. Если движеніе прямолинейное, но не равномѣрное, годографъ - прямая, параллельная троекторіи, проходящая чрезъ начало координатъ.

3. Если движеніе плоское, криволинейное и равномѣрное, годографъ - окружность съ центромъ въ началѣ координатъ.

4. Если движеніе не плоское, но равномѣрное, годографъ - сферическая кривая, т.е., кривая, начерченная на поверхности шара; центръ шара въ началѣ координатъ.

Примѣры:

1, $x = a + \alpha t$, $y = b + \beta t + \frac{g}{2} t^2$; годографъ скорости прямая: $x_1 = \alpha$

2, $x = a \cdot \cos kt$, $y = b \sin kt$; годографъ скорости эллипсъ.

3, $x = a \cdot e^{kt}$. $y = b \cdot e^{-kt}$; годографъ скорости гипербола.

------ " ------

ГЛАВА II.

УСКОРЕНІЕ ТОЧКИ.

*Дополненія *).*

§ 1.

Выведемъ соотношеніе, *существующее между ускореніемъ точки* M *и скоростью точки* H, *вычерчивающей годографъ скорости точки* M.

Пусть MK и M_1K_1 (черт.4) будутъ скорости точки M въ моменты t и $t+\Delta t$; Проводимъ $ML \# M_1K_1$ и $ML' \# KL$. Пусть

$$\frac{ML'}{\Delta t} = MP,$$

и пусть ускореніе точки M

$$\dot{v} = пред(MP)_{\Delta t=0} = MR.$$

Строимъ годографъ скорости: изъ начала координатъ проводимъ $OH \# MK$, $OH_1 \# M_1K_1$ и т.д. По мѣрѣ того, какъ точка движется по ея траекторіи, точка H движется по годографу, слѣдовательно, въ каждый моментъ t имѣемъ нѣкоторую скорость, - обозначимъ ее черезъ u. Раздѣлимъ хорду HH_1 на Δt; пусть

$$\frac{HH_1}{\Delta t} = HW.$$

Такъ какъ, переходя къ предѣлу, мы можемъ замѣнить хорду соотвѣтствующей дугою HH_1, то по опредѣленію скорости имѣемъ:

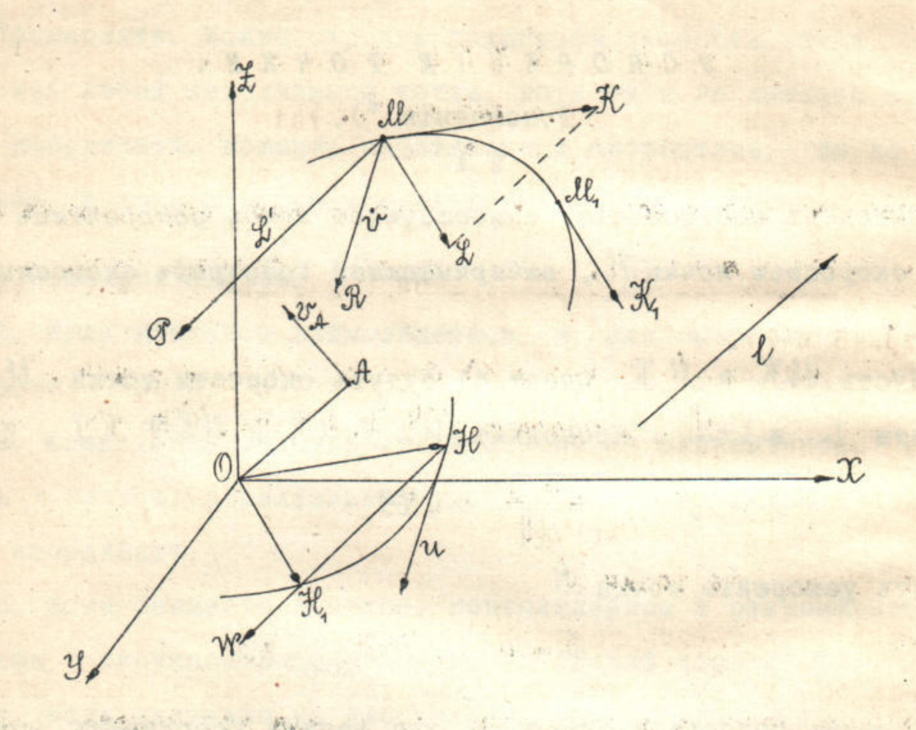
$$пред.(HW)_{\Delta t=0} = u.$$

---

*) *Курсъ Теоретической Механики, часть I. Кинематика, стр. 137-143. Изд.1914 г.*

Изъ равенства треугольниковъ HOH_1 и MKL вытекаетъ: $HH_1 \# KL$, слѣдовательно $HH_1 \# ML'$; раздѣляя на Δt получаемъ:

$$HW \# MP.$$



Чертежъ 4.

Переходимъ къ предѣлу, уменьшая Δt до нуля, получимъ:

$$\text{пред.}(HW)_{\Delta t=0} \# \text{пред.}(MP)_{\Delta t=0},$$

или

$$u \# v$$

Мы пришли такимъ образомъ къ слѣдующему заключенію: *ускореніе движущейся точки по численной величинѣ и по направленію равно скорости точки, вычерчивающей годографъ ея скорости* *).

Слѣдствіе. Проекція ускоренія движущейся точки на какую

---

*) *Говоримъ, "по численной величинѣ", потому что скорость и ускореніе величины разнородныя.*

либо ось равна проекціи на ту же ось скорости точки годографа.

§ 2.

Выведемъ выраженія *для проекціи ускоренія точки на какую угодно ось* l *постояннаго или перемѣннаго направленія.*

На основаніи приведеннаго выше слѣдствія изъ соотношенія между ускореніемъ точки и скоростью точки, вычерчивающей годографъ, намъ достаточно найти выраженіе проекціи скорости u на ось l, а для этого воспользуемся формулами (1) и (2) (см. § 1, стр. 6 и 7).

Если ось l сохраняетъ *постоянное* направленіе въ пространствѣ, то на основаніи формулы (1) пишемъ:

$$\dot{v}\cdot\cos(\dot{v},l) = u\cos(u,l) = \frac{d[v\cdot\cos(v,l)]}{dt} = \frac{d^2[r\cdot\cos(r,l)]}{dt^2},$$

гдѣ r радіусъ-векторъ точки M.

Когда ось l *измѣняетъ* свое направленіе въ пространствѣ, примѣняемъ формулу (2), получаемъ:

$$\dot{v}\cdot\cos(\dot{v},l) = u\cdot\cos(u,l) = \frac{d[v\cdot\cos(v,l)]}{dt} - v\cdot v_A\cdot\cos(v\cdot v_A),$$

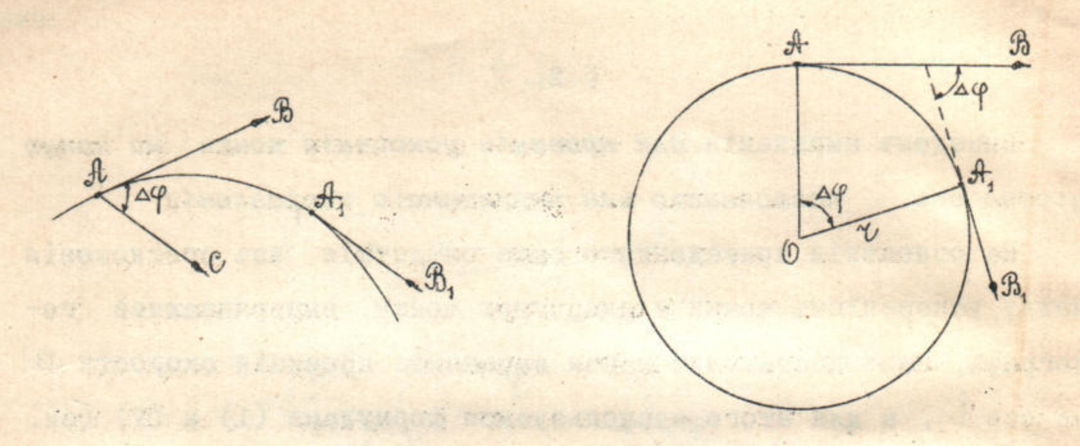
гдѣ v_A есть скорость точки A, лежащей на OA $(OA \parallel l)$ и отстоящей отъ начала координатъ на единицу длины.

------ " ------

Для дальнѣйшаго изложенія намъ понадобятся нѣкоторыя свѣдѣнія изъ *геометріи.*

Уголъ $\Delta\varphi$, образуемый направленіями двухъ касательныхъ AB и A_1B_1 (черт.5), проведенныхъ къ кривой въ двухъ безконечно

близкихъ точкахъ A_1 и A, $\Delta\varphi = \angle BAC$ ($AC \parallel A_1B_1$) называется *угломъ смежности* кривой въ точкѣ A.



Чертежъ 5. Чертежъ 6.

Обозначимъ длину безконечно малой дуги AA_1 черезъ Δs.

Пред. $\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right)_{\Delta s=0}$ называется *кривизной кривой* въ точкѣ A; получаемъ, такимъ образомъ, слѣдующее *опредѣленіе:* Кривизна кривой въ нѣкоторой точкѣ есть предѣлъ, къ которому стремится отношеніе угла смежности къ соотвѣтствующей дугѣ, при уменьшеніи ея до нуля.

Въ частномъ случаѣ, когда кривая есть окружность, кривизна имѣетъ постоянную величину: она равна обратной величинѣ радіуса окружности.

Въ самомъ дѣлѣ, уголъ AOA_1 (черт. 6) равенъ углу смежности $\Delta\varphi$, слѣдовательно, длина дуги $AA_1 = \Delta s = r\cdot\Delta\varphi$; поэтому кривизна окружности въ точкѣ A равна:

$$\text{пред.}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right)_{\Delta s=0} = \text{пред.}\left(\frac{\Delta\varphi}{r\cdot\Delta\varphi}\right) = \text{пред.}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}.$$

По аналогіи съ окружностью и въ общемъ случаѣ кривизну всякой кривой выражаетъ въ видѣ $\frac{1}{\rho}$, причемъ длина ρ, величина обратная кривизнѣ кривой, называется *радіусомъ кривизны кривой* въ данной точкѣ.

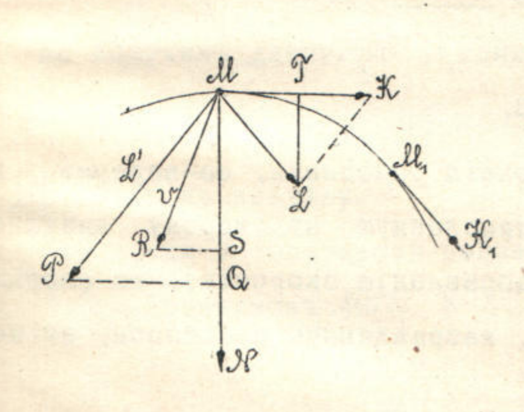
Если кривизну кривой обозначимъ черезъ k ,то радіусъ кривизны

$$\rho = \frac{1}{k}.\text{*)}$$

Черезъ касательную AB и линію AC (черт.5) проведемъ плоскость P ; по мѣрѣ приближенія A_1 къ A плоскость P будетъ измѣнять свое положеніе, и ея предѣльное положеніе (при уменьшеніи ΔS до нуля) называется *плоскостью кривизны* или *соприкасающеюся плоскостью* кривой въ точкѣ A ; - получаемъ слѣдующее *опредѣленіе:* Плоскость кривизны кривой въ данной точкѣ есть предѣльное положеніе плоскости, проведенной черезъ касательную къ кривой въ этой точкѣ, параллельно касательной въ точкѣ безконечно близкой.

Когда кривая плоская, то плоскость кривизны совпадаетъ съ ея собственной плоскостью.

Нормалью къ кривой въ данной точкѣ называется перпендикуляръ, возстановленный въ этой точкѣ къ касательной, проведенной изъ этой же точки.



Чертежъ 7.

Очевидно, въ данной точкѣ кривой можно провести безчисленное множество нормалей - всѣ онѣ заключаются въ *нормальной плоскости.* Нормаль, лежащая въ плоскости кривизны кривой, называется *главной нормалью.*

Нетрудно замѣтить, что

---

*) *Кривизна прямой равна нулю, и, слѣдовательно, радіусъ кривизны прямой будетъ безконечно большой.*

Киевский Гидромелиоративный институт БИБЛИОТЕКА

59462

ускоренie точки всегда заключается въ плоскости кривизны траекторiи.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть скорость точки въ моментъ t будетъ MK, (черт.7), въ моментъ $t+\Delta t$ — M_1K_1. Проводимъ

$$ML \# M_1K_1 \; , \; ML' \# KL.$$

Пусть

$$\frac{ML}{\Delta t} = MP$$

и

$$\text{пред.} (MP)_{\Delta t} = MR = \dot{v}.$$

По опредѣленiю, плоскость кривизны въ точкѣ M есть предѣльное положенiе плоскости KLM. Прямая KL и точка M заключаются въ плоскости KLM. Переходя къ предѣламъ, получимъ, что MR будетъ заключаться въ плоскости кривизны.

Такъ какъ для плоской кривой плоскость кривизны совпадаетъ съ ея плоскостью, то въ этомъ случаѣ ускоренiе заключается въ плоскости движенiя, что очевидно.

------ " ------

§ 3.

Найдемъ выраженiя для *проекцiй ускоренiя, во-первыхъ,* на *касательную* къ траекторiи, направленную въ сторону движенiя точки (другими словами - на направленiе скорости), *во-вторыхъ,* на *главную нормаль* траекторiи, направленную въ сторону ея вогнутости.

Пусть MN будетъ главная нормаль къ траекторiи въ точкѣ M (черт.7). Намъ предстоитъ найти выраженiя для проекцiй ускоренiя MR на оси MK и MN *).

---

*) *Проекцiя ускоренiя на третью ось, перпендикулярную къ MK и MN равна нулю, потому что эта ось перпендикулярна къ*

Чтобы найти проекцію ускоренія на *направленіе скорости*, можемъ воспользоваться формулой (2), подставляя MK вмѣсто l:

$$\dot{v}\cdot\cos(\dot{v},MK) = \frac{d[v\cdot\cos(v,MK)]}{dt} - v\cdot v_A\cdot\cos(v,v_A).$$

Имѣемъ:

$$\cos(v,MK)=1\ ,\ \cos(v,v_A)=0,$$

такъ какъ $v_A\perp v$ на основаніи замѣчанія 1-го; получаемъ:

$$\dot{v}\cdot\cos(\dot{v},MK) = \frac{dv}{dt}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Проекція ускоренія на направленіе касательной къ траекторіи называется *касательнымъ* (или *тангенціальнымъ*) *ускореніемъ* и обозначается черезъ

$$\dot{v}_t = \frac{dv}{dt}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Выраженіе проекціи ускоренія на *направленіе главной нормали* къ траекторіи равно:

$$\dot{v}\cdot\cos(\dot{v},MN) = MR\cdot\cos\angle(RMN) = MS.$$

Мы получимъ длину MS, если найдемъ выраженіе проекціи

$$MP\cdot\cos\angle(PMN) = MQ$$

и перейдемъ къ предѣлу.

Изъ точки L опускаемъ перпендикуляръ LT на MK. Изъ подобія треугольниковъ MPQ и KLT слѣдуетъ:

$$\frac{MQ}{MP} = \frac{LT}{KL},$$

откуда

$$MQ = \frac{MP\cdot LT}{KL}.$$

Такъ какъ

плоскости кривизны.

$$MP = \frac{ML'}{\Delta t} = \frac{KL}{\Delta t},$$

то

$$MQ = \frac{LT}{\Delta t} \quad ;$$

слѣдовательно:

$$MS = \text{пред.}(MQ)_{\Delta t=0} = \text{пред.}\left(\frac{LT}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0}.$$

Уголъ KML есть уголъ смежности; обозначимъ его черезъ $\Delta\varphi$, тогда

$$LT = ML \cdot \sin\Delta\varphi,$$

и мы получимъ:

$$MS = \text{пред.}\left(ML \cdot \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0}.$$

Представимъ правую часть равенства въ слѣдующемъ видѣ:

$$MS = \text{пред.}\left\{ML \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}\right\}_{\Delta t=0};$$

будемъ уменьшать Δt до нуля и посмотримъ, къ чему будетъ стремиться каждый изъ этихъ четырехъ множителей.

ML стремится совпасть съ MK ; слѣдовательно:

$$\text{пред}(ML)_{\Delta t=0} = MK = v \; ;$$

$$\text{пред}\left(\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}\right)_{\Delta t=0} = 1.$$

Предѣлъ $\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right)$ есть кривизна траекторіи, слѣдовательно, если радіусъ кривизны обозначимъ черезъ ρ , то

$$\text{пред.}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right)_{\Delta t=0} = \frac{1}{\rho},$$

$$\text{пред.}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0} = v.$$

Такимъ образомъ:

$$\mathcal{MS} = \dot{v}\cdot 1\cdot\frac{1}{\varrho}\cdot v = \frac{v^2}{\varrho}$$

слѣдовательно, проекція ускоренія на направленіе главной нормоли къ траекторіи равна:

$$\dot{v}\cdot\cos(v,\mathcal{MN}) = \frac{v^2}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Эта проекція ускоренія называется *нормальнымъ ускореніемъ* точки и обозначается черезъ $\dot{v}_n$:

$$\dot{v}_n = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Такъ какъ проекція ускоренія на третью ось (перпендикулярную къ плоскости $\mathcal{KMN}$), какъ замѣчено выше, равна нулю, то на основаніи формулъ (3) и (4) имѣемъ:

$$\dot{v} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\varrho^2}}\;.$$

Слѣдствія изъ формулъ:

$$\dot{v}_t = \frac{dv}{dt} \quad \text{и} \quad \dot{v}_n = \frac{v^2}{\varrho}.$$

1)Если движеніе точки по какой-угодно кривой будетъ равномѣрное, т.е. совершается съ постоянной скоростью, то

$$v_t = 0 \quad \text{и} \quad \dot{v}_n = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Эти двѣ формулы показываютъ, что ускореніе направлено по главной нормали въ сторону вогнутости траекторіи и по величинѣ равно $\frac{v^2}{\varrho}$, т.е. оно пропорціонально кривизнѣ траекторіи.

2) Если движеніе происходитъ по окружности радіуса $\mathcal{R}$, то $\varrho = \mathcal{R}$ и скорость точки

$$v = \mathcal{R}\cdot|\varphi'| = \mathcal{R}\cdot\omega,$$

гдѣ $|\varphi'| = \omega$ есть угловая скорость.

Въ этомъ случаѣ

$$v_t = R\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R\frac{d\omega}{dt} = R\dot{\omega}.$$

гдѣ $\dot{\omega}$ - угловое ускореніе и

$$v_n = \frac{R^2\varphi'^2}{R} = R\varphi'^2 = R.\omega^2.$$

Въ частномъ случаѣ, если точка движется по окружности равномѣрно,

$$\omega = const.$$

$$\dot{v}_t = 0, \qquad \dot{v}_n = R\omega^2.$$

------- " -------

ГЛАВА III.

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ И СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ.

§ 1.

Относительное движеніе точки по отношенію къ нѣкоторому движущемуся твердому тѣлу есть послѣдовательный переходъ разсматриваемой точки черезъ точки этого тѣла.

Если строго держаться этого опредѣленія, то пришлось бы разсматривать относительное движеніе только такой точки, которая находится внутри движущагося тѣла или на его поверхности. Чтобы распространить опредѣленіе относительнаго движенія и на тотъ случай, когда точка находится внѣ тѣла, мы должны

каждый разъ представляетъ себѣ, что тѣло какъ бы выростаетъ и включаютъ въ себя разсматриваемую точку. Такое проницаемое твердое тѣло неограниченныхъ размѣровъ называютъ *"неизмѣняемой средой"*.

Абсолютное движеніе точки есть послѣдовательный переходъ ея черезъ точки пространства; слѣдовательно, *относительное* движеніе обращается въ *абсолютное* тогда, когда движущаяся "неизмѣняемая среда" приводится въ состояніе покоя.

Все то, что мы говорили о *траекторіи, скорости* и *ускореніи* абсолютнаго движенія точки, примѣнимо и къ относительному движенію; разница только въ томъ, что въ случаѣ относительнаго движенія точки мы должны брать координатныя оси не неподвижныя, а проведенныя черезъ точки тѣла (или неизмѣнно съ нимъ связанныя) и, слѣдовательно, движущіяся вмѣстѣ съ тѣломъ. Когда точка совершаетъ свое относительное движеніе, она вмѣстѣ съ тѣломъ переносится въ пространствѣ; это второе движеніе точки называется *"переноснымъ движеніемъ"*.

Скоростью переноснаго движенія въ данный моментъ называется та скорость, которую точка имѣла бы въ этотъ моментъ, если бы она была прикрѣплена къ тѣлу; другими словами, - скорость той точки тѣла, съ которой разсматриваемая движущаяся точка въ данный моментъ совпадаетъ.

Теорема. Скорость абсолютнаго движенія точки по величинѣ и направленію равна геометрической суммѣ скоростей относительнаго и переноснаго движеній разсматриваемой точки.

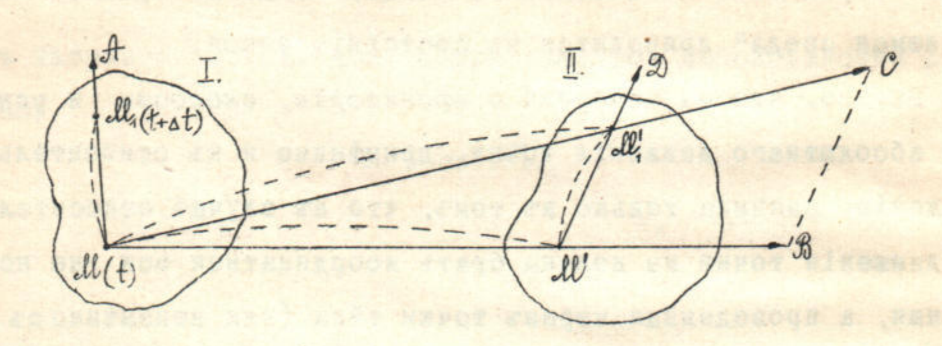
Обозначимъ: v - скорость абсолютнаго движенія точки, u - скорость относительнаго движенія, и v_1 - скорость переноснаго движенія. Докажемъ, что *).

---

*) *Условимся въ случаѣ геометрическаго сложенія ставить надъ слагаемыми и суммой горизонтальныя черты.*

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{u}.$$

Пусть въ нѣкоторый моментъ t тѣло занимаетъ положеніе I (черт.8). Въ этомъ тѣлѣ или на его поверхности движется точка M. Пусть M и M_1 будутъ положенія этой точки въ тѣлѣ въ моменты t и $t+\Delta t$; кривая MM_1 - относительная траекторія точки.



Чертежъ 8.

За промежутокъ времени Δt тѣло само перемѣстится и займетъ положеніе II, а потому и относительная траекторія MM_1 займетъ новое положеніе $M'M_1'$. Кривая (пунктирная) MM' есть путь, который точка совершила бы въ промежутокъ Δt, если бы она была неизмѣнно связана съ тѣломъ. Кривая (пунктирная) MM_1' есть траекторія точки въ ея абсолютномъ движеніи. Дѣлимъ каждую изъ хордъ MM_1, MM' и MM_1' на Δt; пусть

$$\frac{MM_1}{\Delta t} = MA; \quad \frac{MM'}{\Delta t} = MB; \quad \frac{MM_1'}{\Delta t} = MC.$$

$$\text{пред.}[MA]_{\Delta t=0} = u; \quad \text{пред.}[MB]_{\Delta t=0} = v_1; \quad \text{пред.}[MC]_{\Delta t=0} = v.$$

Соединимъ прямою точки B и C и проведемъ хорду $M'M_1'$. Изъ подобія треугольниковъ $M'MM_1'$ и BMC слѣдуетъ:

$$\frac{BC}{M'M_1'} = \frac{MB}{MM'} = \frac{1}{\Delta t};$$

откуда:

$$\mathcal{BC} = \frac{\mathcal{M'M'_1}}{\Delta t}.$$

Пусть

$$\frac{\mathcal{M'M'_1}}{\Delta t} = \mathcal{M'D}.$$

Тогда

$$\mathcal{BC} = \mathcal{M'D},$$

а такъ какъ $\mathcal{BC} \parallel \mathcal{M'M'_1}$, то $\mathcal{BC} \# \mathcal{M_1D}$.

Изъ Δ -ка $\mathcal{BMC}$ видимъ, что $\mathcal{MC}$ есть геометрическая сумма двухъ прямыхъ: $\mathcal{MB}$ и $\mathcal{BC}$ и, слѣдовательно, также

$$\overline{\mathcal{MC}} = \overline{\mathcal{MB}} + \overline{\mathcal{M'D}}.$$

Перейдемъ къ предѣлу, уменьшая Δt до нуля:

$$\text{пред.}\left[\overline{\mathcal{MC}}\right]_{\Delta t=0} = \text{пред}\left[\overline{\mathcal{MB}}\right]_{\Delta t=0} + \text{пред.}\left[\overline{\mathcal{M'D}}\right]_{\Delta t=0}$$

или

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \text{пред.}\left[\overline{\mathcal{M'D}}\right]_{\Delta t=0}$$

При приближеніи Δt къ нулю, $\mathcal{M'D}$ стремится къ совпаденію съ $\mathcal{MA}$, а потому:

$$\text{пред.}\left[\mathcal{M'D}\right]_{\Delta t=0} = \text{пред.}\left[\mathcal{MA}\right]_{\Delta t=0} = u.$$

Такимъ образомъ получаемъ:

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + u.$$

Слѣдствіе 1-ое. Если извѣстна относительная скорость точки u и переносная ея скорость v_1, то абсолютная скорость точки v выразится по величинѣ и направленію діагональю параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ u и v_1 (черт.9).

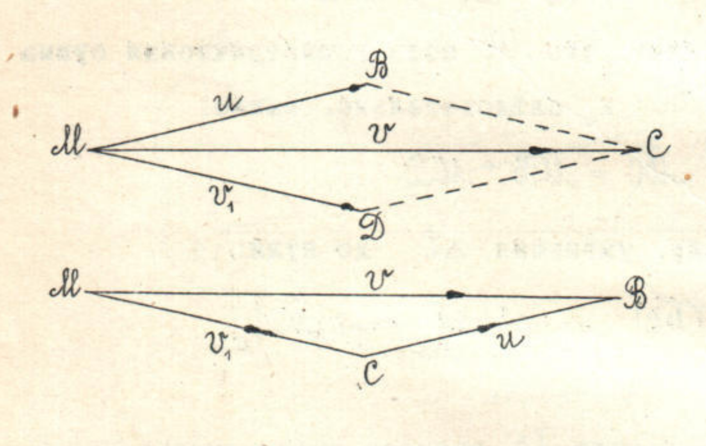
Скорость v можно представить, какъ сторону треугольника, замыкающую двѣ другія стороны u и v_1.

Слѣдствіе 2-ое: Если извѣстны абсолютная скорость v и пе-

реносная v_1, то относительную скорость u найдемъ геометрическимъ вычитаніемъ:

$$\bar{u} = \bar{v} - \bar{v}_1 .$$

Абсолютное движеніе точки слагается, какъ мы видѣли, изъ двухъ движеній: относительнаго и переноснаго; поэтому абсолютное движеніе называется также движеніемъ *составнымъ* изъ двухъ *составляющихъ* движеній: относительнаго и переноснаго.



Чертежъ 9.

При такой терминологіи доказанную теорему можно выразить слѣдующимъ образомъ: *скорость точки въ движеніи составномъ изъ двухъ составляющихъ движеній равна геометрической суммѣ ея скоростей въ составляющихъ движеніяхъ.*

Слѣдствіе 2-ое можно формулировать такъ: скорость точки въ одномъ изъ двухъ составляющихъ движеній равна геометрической разности скоростей точки въ составномъ и въ другомъ составляющемъ движеніи.

Понятіе о составномъ движеніи можно распространить на случай *сколькихъ-угодно* составляющихъ движеній, вводя слѣдующее опредѣленіе: *движеніе точки будетъ составнымъ изъ n составляющихъ движеній тогда, когда скорость точки въ этомъ движеніи въ каждый моментъ равна по величинѣ и направленію геометрической суммѣ тѣхъ скоростей, которыя точка имѣла бы, совершая каждое изъ n составляющихъ движеній отдѣльно.*

Если скорость составного движенія точки обозначимъ черезъ v, а скорость ея составляющихъ движеній черезъ v_1, v_2, v_3..... v_n то на основаніи вышесказаннаго опредѣленія имѣемъ слѣдующее

равенство:

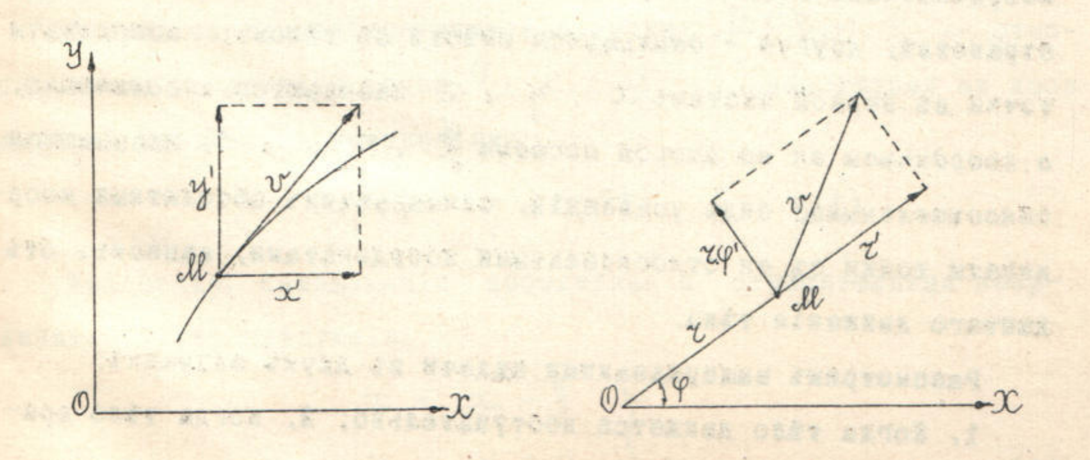
$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \ldots\ldots + \bar{v}_n .$$

Примѣръ. Всякое движенiе точки можно разсматривать, какъ составное изъ трехъ прямолинейныхъ движенiй, направленныхъ параллельно координатнымъ осямъ.

Въ самомъ дѣлѣ, скорость v точки, какъ извѣстно, равна по величинѣ и направленiю дiагонали параллелепипеда, ребра котораго параллельны координатнымъ осямъ и соотвѣтственно равны первымъ производнымъ отъ координатъ по времени: x', y', z'; слѣдовательно, скорость v есть геометрическая сумма трехъ скоростей: x', параллельной оси OX, y' - параллельной оси OY и z' - параллельной оси OZ; такимъ образомъ, составляющiя движенiя точки, параллельныя координатнымъ осямъ, будутъ такiя же, какъ движенiя ея проекцiй на эти оси.

Въ частномъ случаѣ, когда точка движется *въ плоскости*, ея движенiе можно разсматривать, какъ составное изъ двухъ прямолинейныхъ движенiй, соотвѣтственно параллельныхъ осямъ OX и OY; скорость перваго движенiя равна x', скорость второго y' (черт.10).

Наглядно это можно представить себѣ такимъ образомъ: точка движется со скоростью x' по линейкѣ, расположенной парал-



Чертежъ 10.   *Чертежъ* 10_1.

лельно оси OX, и въ то же время сама линейка движется по оси OY со скоростью y'.

Плоское движеніе точки можно разложить на два движенія и другими способами, напримѣръ, такъ, что скорость одного составляющаго движенія будетъ направлена по радіусу-вектору и равна r', а скорость другого по перпендикуляру къ радіусу-вектору и равна $r\varphi'$ (черт. 10_1).

Это разложеніе можемъ представить себѣ такимъ образомъ: точка движется по радіусу-вектору со скоростью r', а въ то же время радіусъ-векторъ вращается вокругъ точки O съ угловой скоростью φ'.

§ 2.

При разсмотрѣніи относительнаго движенія точки представляются двѣ главныхъ задачи:

1. Даны: движеніе тѣла и относительное движеніе точки; опредѣлить *абсолютное* движеніе точки.

2. Даны: движеніе тѣла и абсолютное движеніе точки; опредѣлить *относительное* движеніе точки по отношенію къ тѣлу.

При рѣшеніи этихъ задачъ мы пользуемся двумя системами координатныхъ осей: одну систему беремъ *неподвижную* въ пространствѣ, другую - *движущуюся* вмѣстѣ съ тѣломъ; координаты точки въ первой системѣ x, y, z называются *абсолютными, а координаты ея во второй системѣ* ξ, η, ζ *) называются *относительными;* видъ уравненій, связывающихъ абсолютныя координаты точки съ ея относительными координатами, зависитъ отъ даннаго движенія тѣла.

Разсмотримъ вышеуказанныя задачи въ двухъ случаяхъ:

1. Когда тѣло движется поступательно; 2, когда тѣло вра-

---

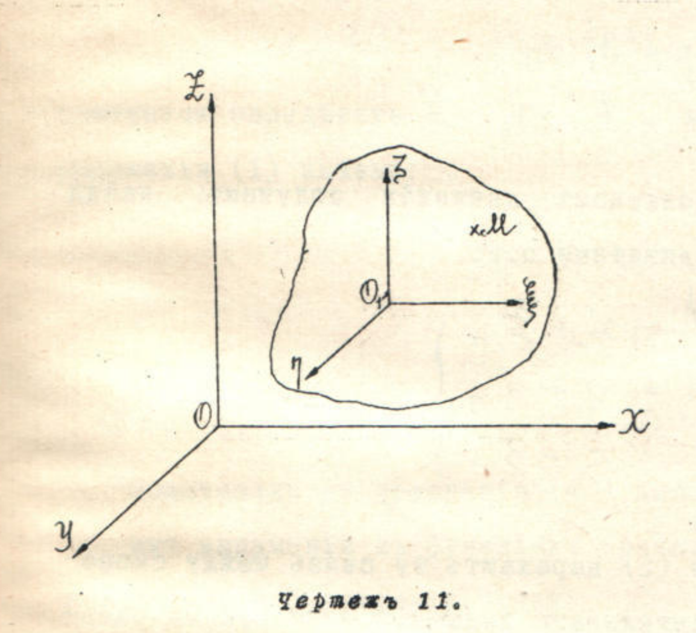
*) *Греческія буквы:* ξ *(кси),* η *(эта),* ζ *(дзета).*

щается вокругъ неподвижной оси.

Первый случай тѣло движется поступательно.

Задача I. Даны: движеніе тѣла и относительное движеніе точки; опредѣлить абсолютное движеніе точки.

Беремъ неподвижныя координатныя оси: OX, OY, OZ (черт. 11). Пусть $O_1(x_0, y_0, z_0)$ будетъ начало относительной координатной системы, оси которой $O_1\xi$, $O_1\eta$, $O_1\zeta$, возьмемъ соотвѣтственно *параллельными* осямъ OX, OY, OZ; такъ какъ тѣло движется поступательно, то во все время его движенія эта параллельность будетъ сохраняться: $O_1\xi \parallel OX$, $O_1\eta \parallel OY$, $O_1\zeta \parallel OZ$. Всѣ точки тѣла движутся, какъ одна изъ нихъ, напримѣръ, O_1, а потому движеніе тѣла задается уравненіями:



Чертежъ 11.

$$x_0 = f_1(t),$$
$$y_0 = f_2(t),$$
$$z_0 = f_3(t).$$

Данное относительное движеніе точки M (ξ, η, ζ — относительныя координаты точки M: x, y, z абсолютныя ея координаты) выражается уравненіями:

$$\xi = \varphi_1(t), \quad \eta = \varphi_2(t), \quad \zeta = \varphi_3(t).$$

Уравненія, связывающія абсолютныя и относительныя координаты будутъ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \\ y &= y_0 + \eta \\ z &= z_0 + \zeta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Подставляя въ эти равенства вмѣсто x_0, y_0, z_0 и ξ, η, ζ ихъ выраженія въ функціяхъ времени, получаемъ уравненія абсолютнаго движенія точки:

$$x = f_1(t) + \varphi_1(t),$$
$$y = f_2(t) + \varphi_2(t),$$
$$z = f_3(t) + \varphi_3(t).$$

Если исключить изъ этихъ трехъ уравненій время, получимъ уравненія абсолютной *траекторіи* точки:

$$y = F_1(x),$$
$$z = F_2(x).$$

Скорость точки въ абсолютномъ движеніи получимъ, найдя проекціи скорости на координатныя оси:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'_0 + \xi', \\ y' &= y'_0 + \eta', \\ z' &= z'_0 + \zeta'. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Примѣчаніе. Уравненія (2) выражаютъ ту связь между скоростями абсолютнаго и относительнаго движенія, которую мы раньше доказали для общаго случая:

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{u}.$$

Ускореніе точки въ абсолютномъ движеніи получимъ, найдя проекціи ускоренія на координатныя оси.

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x''_0 + \xi'', \\ y'' &= y''_0 + \eta'', \\ z'' &= z''_0 + \zeta''. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Уравненія (3) выражаютъ, что при *поступательномъ* движеніи тѣла *ускореніе* абсолютнаго движенія $(\dot{v})$ равно геометри-

ческой суммѣ ускоренiй относительнаго ($\dot{u}$) и переноснаго ($\dot{v}_1$) движенiй:

$$\bar{\dot{v}} = \bar{\dot{v}}_1 + \bar{\dot{u}} .$$

Задача II. Даны: поступательное движенiе тѣла и абсолютное движенiе точки; опредѣлить относительное движенiе точки по отношенiю къ тѣлу.

Дано:

$$x = F_1(t) \quad , \quad y = F_2(t) \quad , \quad z = F_3(t) \ ;$$

$$x_0 = f_1(t) \quad , \quad y_0 = f_2(t) \quad , \quad z_0 = f_3(t) \ ;$$

требуется опредѣлить ξ , η , ζ , какъ функцiя времени t. Изъ уравненiя (1) имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = x - x_0 \\ \eta = y - y_0 \\ \zeta = z - z_0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Подставляя въ уравненiя (4) вмѣсто x , y , z и x_0 , y_0 , z_0 ихъ выраженiя въ функцiяхъ времени, получаемъ уравненiя относительнаго движенiя точки:

$$\xi = F_1(t) - f_1(t) ,$$
$$\eta = F_2(t) - f_2(t) ,$$
$$\zeta = F_3(t) - f_3(t) .$$

Исключивъ изъ этихъ уравненiй время t , найдемъ уравненiя относительной траекторiи точки:

$$\eta = \mathrm{F}_1(\xi) ,$$
$$\zeta = \mathrm{F}_2(\xi) .$$

Скорость и ускоренiе относительнаго движенiя получимъ, най-

дя проекціи ихъ на координатныя оси:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= x' - x'_0 \\ \eta' &= y' - y'_0 \\ \zeta' &= z' - z'_0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \xi'' &= x''_0 + x''_0 \\ \eta'' &= y'' - y''_0 \\ z'' &= z'' - z''_0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

Примѣръ. Карандашъ, совершающій колебательное движеніе:

$$x = a \cdot \sin kt,$$
$$y = 0$$

и листъ бумаги, совершающій колебательное движеніе въ перпендикулярномъ направленіи:

$$x_0 = 0$$
$$y_0 = b \cdot \cos kt.$$

Начерченная кривая будетъ относительная траекторіи карандаша:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Второй случай: тѣло вращается около оси.

Задача I. Даны: движеніе тѣла, *вращающагося* около неподвижной оси, и относительное движеніе точки по отношенію къ этому тѣлу; опредѣлить абсолютное движеніе точки.

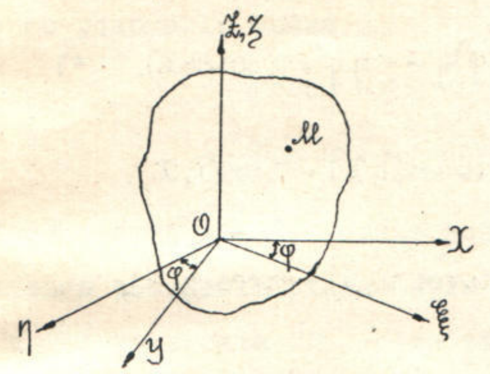
Извѣстны, какъ функціи времени: уголъ поворота тѣла $\varphi = F(t)$ и относительныя координаты точки:

$$\xi = f_1(t), \quad \eta = f_2(t), \quad \zeta = f_3(t) \;;$$

требуется опредѣлить ея абсолютныя координаты: x, y, z какъ

функціи времени.

Неподвижную ось, вокругъ которой вращается тѣло, принимаемъ за ось OZ (черт.12); ее же возьмемъ за ось $O\zeta$, а за ось $O\xi$ беремъ прямую, образующую съ осью OX уголъ φ.



Чертежъ 12.

Уравненія, связывающія абсолютныя координаты съ относительными, будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi\cdot\cos\varphi - \eta\cdot\sin\varphi, \\ y &= \xi\cdot\sin\varphi + \eta\cos\varphi, \\ z &= \zeta \end{aligned}\right\}\ldots(1)$$

Подставляя въ уравненія (1) вмѣсто ξ, η и ζ данныя выраженія ихъ въ функціяхъ времени, получимъ уравненія абсолютнаго движенія точки. Исключивъ же изъ этихъ уравненій время, найдемъ уравненія абсолютной *траекторіи* точки.

Примѣръ. Шарикъ равномѣрно движется по прямой трубкѣ, которая равномѣрно вращается, оставаясь въ одной плоскости:

$$\varphi = nt, \quad \xi = a\cdot t, \quad \eta = 0.$$

Абсолютная траекторія шарика - Архимедова спираль.

Скорость абсолютнаго движенія получимъ, найдя ея проекціи на оси OX, OY и OZ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= (\xi'\cos\varphi - \eta'\sin\varphi) - (\xi\cdot\sin\varphi + \eta\cdot\cos\varphi)\varphi', \\ y' &= (\xi'\cdot\sin\varphi + \eta'\cos\varphi) + (\xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi)\varphi', \\ z' &= \zeta' \end{aligned}\right\}\ldots(2)$$

Первый членъ въ выраженіи x', аналогичный выраженію x въ уравненіи (1), представляетъ проекцію на ось OX относи-

---

тельной скорости точки:

$$\xi' \cos\varphi - \eta' \sin\varphi = u \cos(u, X).$$

Второй членъ въ выраженіи x' представляетъ проекцію переносной скорости на ось OX:

$$-(\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi)\varphi' = -y \cdot \varphi' = v_1 \cos(v_1, X). \quad *)$$

Слѣдовательно:

$$x' = v \cdot \cos(v, X) = u \cdot \cos(u, X) + v_1 \cos(v_1 X).$$

Также найдемъ:

$$y' = v \cdot \cos(v, Y) = u \cdot \cos(u, Y) + v_1 \cos(v_1, Y),$$

и

$$z' = v \cdot \cos(v, Z) = u \cos(u, Z).$$

Эти формулы выражаютъ уже извѣстную намъ связь между скоростями:

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{v}_1$$

Ускореніе абсолютнаго движенія получимъ, найдя его проекціи на оси OX, OY и OZ:

$$x'' = (\xi'' \cos\varphi - \eta'' \sin\varphi) - (\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi)\varphi'' - (\xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi)\varphi'^2 - 2(\xi' \sin\varphi + \eta' \cos\varphi)\varphi';$$

$$y'' = (\xi'' \sin\varphi - \eta'' \cos\varphi) + (\xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi)\varphi'' - (\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi)\varphi'^2 + 2(\xi' \cos\varphi - \eta' \sin\varphi)\varphi';$$

$$z'' = \zeta''.$$

Первые члены въ этихъ формулахъ представляютъ проекціи относительнаго ускоренія на координатныя оси OX, OY и OZ:

$$\xi'' \cos\varphi - \eta'' \sin\varphi = \dot{u} \cdot \cos(\dot{u}, X),$$

$$\xi'' \sin\varphi + \eta'' \cos\varphi = \dot{u} \cdot \cos(\dot{u}, Y),$$

$$\zeta'' = u \cdot \cos(\dot{u}, Z).$$

Вторые члены въ выраженіяхъ x'' и y' представляютъ проекціи на оси OX и OY вращательнаго ускоренія точки: **)

---

*) См.: *"ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА"*, *часть I.*

**) См.: *"ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА"*, *часть I.*

$$-(\xi \sin\varphi + \eta\cdot\cos\varphi)\varphi'' = -y\varphi'',$$
$$(\xi\cos\varphi - \eta\cdot\sin\varphi)\varphi'' = x\cdot\varphi''.$$

Третьи члены суть проекціи на оси OX и OY центростремительнаго ускоренія точки:

$$-(\xi\cos\varphi - \eta\cdot\sin\varphi)\varphi'^2 = -x\varphi'^2,$$
$$-(\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi)\varphi'^2 = -y\varphi'^2.$$

Проекціи на ось OZ какъ вращательнаго, такъ и центростремительнаго ускоренія равны нулю. Такъ какъ проекціи на оси OX и OY ускоренія $\dot{v}_1$ точки тѣла *) во вращательномъ движеніи соотвѣтственно равны алгебраической суммѣ проекцій на эти оси вращательнаго и центростремительнаго ускоренія, то

$$-(\xi\cdot\sin\varphi + \eta\cdot\cos\varphi)\varphi'' - (\xi\cdot\cos\varphi - \eta\sin\varphi)\varphi'^2 = \dot{v}_1\cdot\cos(\dot{v}_1 X),$$
$$(\xi\cdot\cos\varphi - \eta\cdot\sin\varphi)\varphi'' - (\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi)\varphi'^2 = \dot{v}_1\cdot\cos(\dot{v}_1 Y).$$

Остаются члены:

$$-2(\xi'\cdot\sin\varphi + \eta'\cos\varphi)\cdot\varphi',$$

и

$$2(\xi'\cos\varphi - \eta'\cdot\sin\varphi)\varphi';$$

эти члены представляютъ проекціи на оси OX и OY ускоренія, которое называется *добавочнымъ* или *Коріолисовымъ* ускореніемъ; обозначимъ его черезъ k'; тогда будетъ:

$$\left.\begin{aligned} k'\cdot\cos(k', X) &= -2(\xi'\sin\varphi + \eta\cos\varphi)\varphi', \\ k'\cdot\cos(k', Y) &= 2(\xi'\cos\varphi - \eta\cdot\sin\varphi)\varphi', \\ k'\cos(k', Z) &= 0. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (4)$$

Сравнивая форм. (4) съ выраженіями проекцій *вращательной скорости* см. вторые члены въ уравн. (2), мы видимъ, что онѣ от-

---

*) *Ускореніе $\dot{v}_1$ есть вмѣстѣ съ тѣмъ ускореніе переноснаго движенія для разсматриваемой нами точки, или, короче переносное ускореніе этой точки.*

личаются отъ послѣднихъ, кромѣ множителя 2, только тѣмъ, что вмѣсто проекцій радіуса-вектора точки (ξ и η) здѣсь входятъ проекціи относительной скорости (ξ' и η'); отсюда заключаемъ:

Добавочное ускореніе по величинѣ и направленію равно удвоенной вращательной скорости той точки тѣла, радіусъ-векторъ которой, проведенный изъ начала координатъ, по величинѣ и направленію равенъ относительной скорости движущейся точки.

На чертежѣ 13, $MA = u$ относительная скорость точки M $OB \# MA$; $BC \perp OZ$; вращательная скорость точки B равна:

$$BD = BC\cdot\varphi' = OB\cdot\sin BOC\cdot\varphi' = u\cdot\varphi'\sin(u, OZ);$$

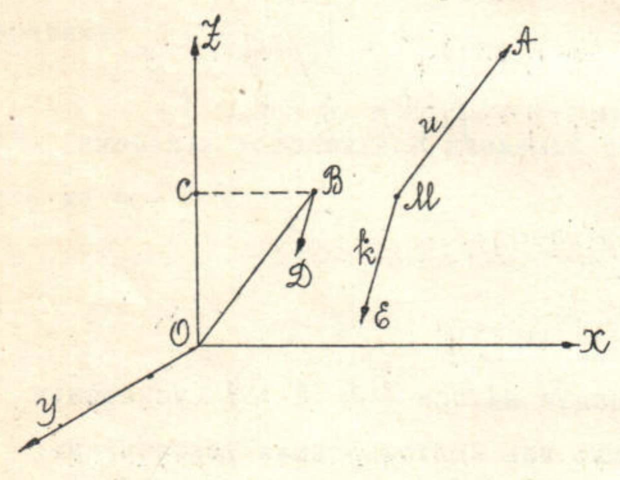
прямая ME , параллельная BD и равная $2BD$, изображаетъ добавочное ускореніе k' точки M.

$$k = 2u\cdot\varphi'\cdot\sin(u, OZ).$$

Изъ уравн. (3) и (4) слѣдуетъ формула:

$$\bar{\dot{v}} = \bar{\dot{u}} + \bar{\dot{v}}_1 + \bar{\dot{k}} \ldots\ldots (5)$$

выражающая теорему *Коріолиса* для разсматриваемаго случая:



Чертежъ 13.

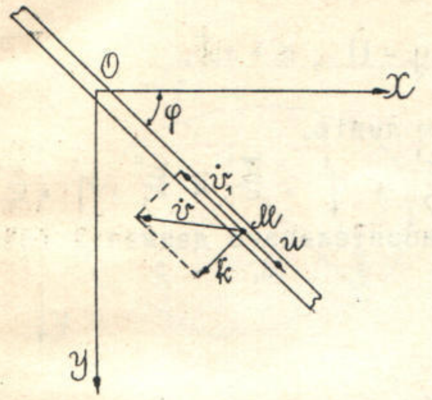
Абсолютное ускореніе точки ($\dot{v}$) равно геометрической суммѣ трехъ ея ускореній; относительнаго ускоренія ($\dot{u}$), переноснаго ($\dot{v}_1$) и добавочнаго ($\dot{k}$).

Примѣръ: Въ задачѣ, гдѣ шарикъ равномѣрно движется ($\xi = at$, $\eta = 0$) по прямой трубкѣ, равномѣрно вращающейся ($\varphi = nt$) въ плоскости XOY *) (черт. 14), относительное ускореніе $\dot{u} = 0$; переносное ускореніе состоитъ изъ одного центростремительнаго

---

*) *Предполагаемъ, что* $a > 0$ *и* $n > 0$

($r \cdot \varphi'^2$), такъ какъ вращательное ускореніе ($r \cdot \varphi''$) равно нулю;



Чертежъ 14.

поэтому:

$$\dot{v}_1 = n^2 \cdot a \cdot t$$

и направлено по трубкѣ къ центру вращенія; добавочное ускореніе

$$\dot{k} = 2 u \cdot \varphi' = 2 a \cdot n$$

и направленно по перпендикуляру трубкѣ; абсолютное ускореніе

$$\dot{v} = a n \cdot \sqrt{n^2 t^2 + 4}\,.$$

Примѣчаніе 1-ое. Въ частномъ случаѣ, когда относительная скорость точки (u) будетъ параллельна оси вращенія OZ, добавочное ускореніе ($\dot{k}$) равно нулю.

Примѣчаніе 2-ое. Ускореніе, равное и противоположное добавочному, называется *поворотнымъ* ускореніемъ.

Задача II. Даны: движеніе тѣла, *вращающагося* вокругъ неподвижной оси, и абсолютное движеніе точки; опредѣлить относительное движеніе точки по отношенію къ данному тѣлу.

Дано: $\varphi = F(t)$ и $x = F_1(t)$, $y = F_2(t)$, $z = F_3(t)$; требуется опредѣлить ξ, η, ζ, какъ функціи времени.

Выражаемъ относительныя координаты черезъ абсолютныя:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi, \\ \eta &= -x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi, \\ z &= \zeta \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

Замѣнивъ въ уравненіи (6) x, y, z и их выраженіями въ функціяхъ времени, получимъ уравненія относительнаго движенія точки. Исключивъ изъ нихъ время, найдемъ уравненія относительной *траекторіи* точки.

Примѣръ. Рѣзецъ движется по прямой; тѣло вращается равномѣрно около оси, параллельной этой прямой.

$$\varphi = kt\,,\quad x = a\,,\; y = 0\,,\; z = nt.$$

Рѣзецъ вычерчиваетъ въ тѣлѣ *винтовую* линію.

Найдя производныя по времени: ξ', η', ζ' и ξ'', η'', ζ'', мы получимъ скорость и ускореніе относительнаго движенія точки.

Общій случай, когда точка совершаетъ относительное движеніе по отношенію къ тѣлу, движущемуся *какъ угодно*, будетъ разсмотрѣнъ ниже во главѣ VII.

------ " ------

ГЛАВА IV.

§ 1.

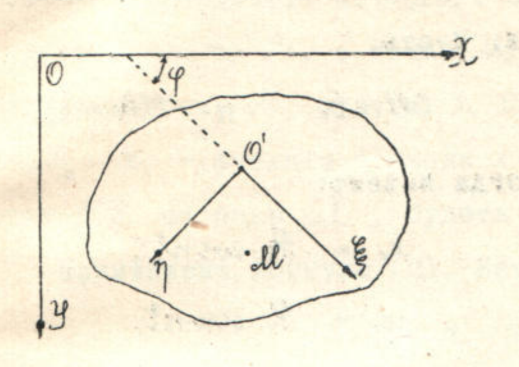
*Движеніе твердаго тѣла, параллельное неподвижной плоскости, или движеніе плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости**).

Примемъ плоскость, въ которой движется неизмѣняемая фигура, за плоскость XOY (черт.15); пусть $O'\xi$ и $O'\eta$ будутъ координатныя оси движущіяся вмѣстѣ съ фигурой, и φ уголъ, образуемый осью $O'\xi$ съ осью OX; абсолютныя координаты какой-нибудь точки M фигуры обозначимъ черезъ x, y; относительныя

---

*) *Аналитическое разсмотрѣніе движенія, составляющее дополненіе къ соотвѣтствующей статьѣ первой части курса. См. "Теор. Механика" часть I.*

ея координаты черезъ ξ, η; вслѣдствіе неизмѣняемости фигуры координаты ξ, η сохраняютъ для каждой точки фигуры постоянныя значенія при движеніи фигуры; измѣняются при этомъ только координаты x и y. Если абсолютныя координаты точки O' обозначимъ черезъ x_0, y_0, то движеніе фигуры опредѣляются уравненіями:



Чертежъ 15.

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= f_1(t), \\ y_0 &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Зная функціи: $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, мы для каждаго момента времени можемъ найти соотвѣтствующее положеніе фигуры.

Уравненія, связывающія абсолютныя координаты съ относительными, будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi \\ y &= y_0 + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Чтобы получить уравненіе *траекторіи* какой-либо точки фигуры, мы должны въ формулы (2) подставить вмѣсто ξ и η относительныя координаты этой точки, вмѣсто x_0, y_0, z. ихъ значенія изъ (1) и заключить время; уравненіе траекторіи будетъ вида:

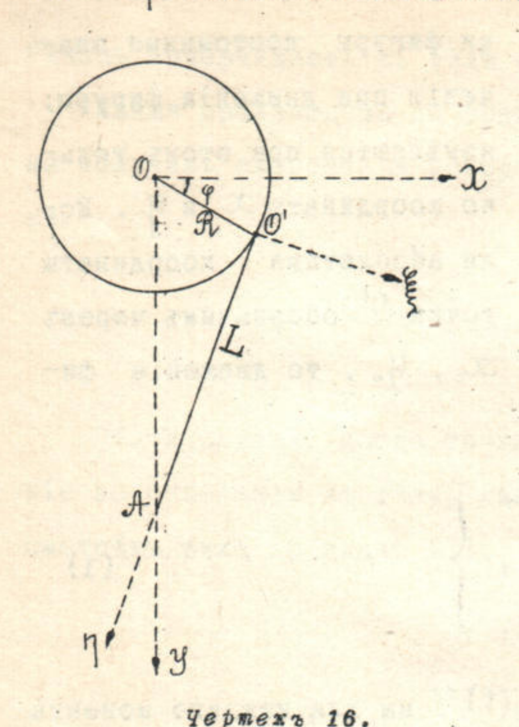
$$f(x, y) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Примѣръ 1-ый. Найдемъ уравненія (1) для движенія *шатуна* (черт.16) въ случаѣ равномѣрнаго движенія:

$$\varphi = nt.$$

Точку O' примемъ за начало относительныхъ координатъ и ось $O'\eta$ направимъ вдоль шатуна. Пусть:

$$OO' = R \quad \text{и} \quad O'A = L.$$



Чертежъ 16.

Тогда имѣемъ:

$$x_0 = R\cdot\cos nt,$$

$$y_0 = R\cdot\sin nt.$$

Уголъ φ найдемъ изъ того условія, что точка $A(\xi=0, \eta=L)$ движется по оси OY ; слѣдовательно, для этой точки:

$$x = x_0 - \eta\cdot\sin\varphi = R\cos nt - L\cdot\sin\varphi = 0,$$

откуда

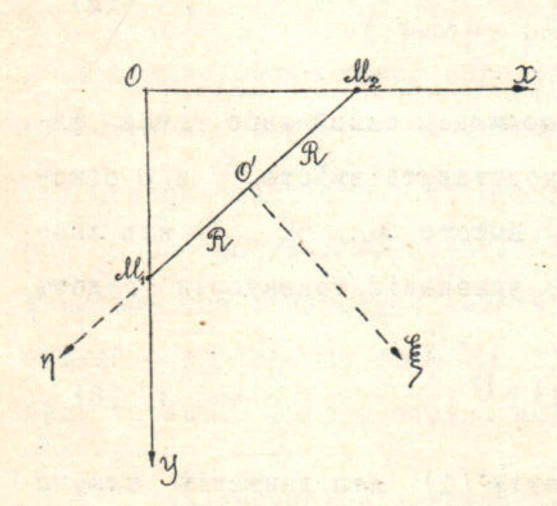
$$\sin\varphi = \frac{R}{L}\cos nt,$$

и слѣдовательно:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{R}{L}\cos nt\right).$$

Примѣръ 2-ой. Эллиптическій циркуль.

Пусть двѣ точки плоской фигуры движутся по перпендикулярнымъ прямымъ: одна M_1 по оси OY , другая M_2 по оси OX (черт.17); найдемъ уравненія (1) движенія этой фигуры.



Чертежъ 17.

За начало относительныхъ координатъ беремъ точку O' , середину прямой M_1M_2 , такъ

что $M_1O' = OM_2 = R$. Пусть ось $O'\xi$ перпендикулярна къ M_1M_2, а ось $O'\eta$ совпадаетъ съ M_2M_1. Относительныя координаты точки M_1 будутъ: $\xi_1=0$, $\eta_1=R$, а точки M_2 : $\xi_2=0$, $\eta_2=-R$. Абсолютныя координаты точки M_1 будутъ: $x_1=0$, и y_1 - функція времени, точки M_2 : x_2 - функція времени и $y_2=0$. Уголъ φ, образуемый осью $O'\xi$ съ осью OX, будетъ тоже нѣкоторая функція времени.

Примѣняемъ формулы (2). Изъ первой для точки M_1 имѣемъ:

$$0 = x_0 - R\cdot\sin\varphi;$$

изъ второй для точки M_2

$$0 = y_0 - R\cos\varphi,$$

гдѣ x_0, y_0 абсолютныя координаты точки O'.

Получимъ два уравненія съ тремя неизвѣстными: x_0, y_0, φ; но уголъ φ можетъ какъ угодно измѣняться съ теченіемъ времени, такъ какъ, напримѣръ, точка M_1 можетъ двигаться по оси OY съ какою-угодно скоростью; полагая $\varphi = F(t)$, получимъ слѣдующія уравненія, выражающія движеніе фигуры:

$$\left.\begin{aligned} x_0 = R\sin\varphi\ , \quad y_0 = R\cos\varphi, \\ \varphi = F(t). \end{aligned}\right\} \qquad (1_1)$$

Найдемъ теперь уравненія *траекторіи* какой-либо точки (ξ η) фигуры. Воспользуемся опять уравненіями (2):

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= (R+\eta)\sin\varphi + \xi\cos\varphi, \\ y_0 &= \xi\sin\varphi + (R+\eta)\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (2_1)$$

Чтобы исключить время, исключимъ φ. Рѣшаемъ первое уравненіе относительно $\sin\varphi$, второе относительно $\cos\varphi$:

$$(R+\eta)\cdot x - \xi\cdot y = (R^2-\eta^2-\xi^2)\cdot\sin\varphi,$$

$$-\xi\cdot x + (R-\eta)\cdot y = (R^2-\eta^2-\xi^2)\cdot\cos\varphi$$

Возвышая полученныя выраженія въ квадратъ и складывая, по-

лучимъ уравненіе искомой траекторіи:

$$\left[(\mathfrak{R}+\eta)\cdot x-\xi\cdot y\right]^2+\left[\xi\cdot x-(\mathfrak{R}-\eta)\cdot y\right]^2=\left(\mathfrak{R}^2-\eta^2-\xi^2\right)^2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (3_1)$$

Въ этомъ уравненіи ξ и η величины постоянныя, а перемѣнными будутъ x и y. По отношенію къ x и y уравненіе (3_1) второй степени, слѣдовательно, траекторія есть кривая второго порядка, и именно *эллипсъ*, ибо, какъ видно изъ уравн. (2_1), она не имѣетъ безконечно удаленныхъ точекъ.

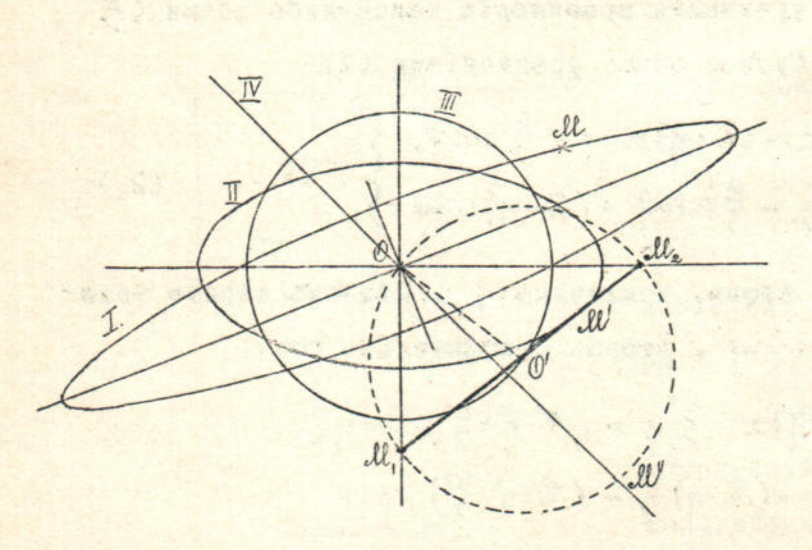
Итакъ, всякая точка разсматриваемой фигуры описываетъ *эллипсъ*, центръ котораго находится въ точкѣ O, но оси, вообще говоря не совпадаютъ съ осями OX и OY (напримѣръ, на черт. 18 элипсъ I, описываемый точкою M).

Частные случаи: 1) для точекъ, лежащихъ на прямой M_1M_2, т.е. для такихъ, для которыхъ $\xi=0$, уравненіе траекторіи будетъ слѣдующее:

$$(\mathfrak{R}+\eta)^2\cdot x^2+(\mathfrak{R}-\eta)^2\cdot y^2=(\mathfrak{R}^2-\eta^2)^2,$$

или

$$\frac{x^2}{(\mathfrak{R}-\eta)^2}+\frac{y^2}{(\mathfrak{R}+\eta)^2}=1 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (3_2)$$



Чертежъ 18.

Изъ (3_2) слѣдуетъ, что каждая изъ точекъ прямой M_1M_2 описываетъ эллипсъ, центръ котораго на началѣ координатъ O и оси *совпадаютъ* съ осями координатъ (на черт. 18 эллипсъ II. описываемый точкой

$\mathcal{M}'$).

2) Найдемъ точки, вычерчивающія *окружность*.

Уравненіе траекторіи въ этомъ случаѣ должно принять видъ:

$$x^2+y^2=k^2;$$

коэффиціенты при x^2 и y^2 будутъ равны между собою при $\eta=0$:

$$(\mathcal{R}+\eta)^2+\xi^2=(\mathcal{R}-\eta)^2+\xi^2;$$

члены, содержащіе произведеніе xy, исчезаютъ при $\xi=0$, слѣдовательно, окружность описываетъ единственная точка $O'(\xi=0,\ \eta=0)$ (на черт. 18 окружность III).

Уравненіе окружности будетъ:

$$x^2+y^2=\mathcal{R}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3_3)$$

3) Найдемъ точки, вычерчивающія *прямую*.

Когда

$$\mathcal{R}^2-\eta^2-\xi^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (k)$$

уравненіе (3_1) обратится въ систему прямыхъ, проходящихъ черезъ точку O:

$$(\mathcal{R}+\eta)\cdot x-\xi\cdot y=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (m)$$

$$\xi\cdot x-(\mathcal{R}-\eta)y=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (n)$$

Эти два уравненія выражаютъ одну и ту же прямую. Въ самомъ дѣлѣ, изъ (m) слѣдуетъ:

$$\frac{y}{x}=\frac{\mathcal{R}+\eta}{\xi},$$

и изъ (n):

$$\frac{y}{x}=\frac{\xi}{\mathcal{R}-\eta};$$

но

$$\frac{\mathcal{R}+\eta}{\xi}=\frac{\xi}{\mathcal{R}-\eta}$$

потому что, какъ видно изъ уравненія (k)

$$R^2 - \eta^2 = \xi^2.$$

Изъ уравненія (k) слѣдуетъ, что прямыя линіи описываютъ всѣ точки окружности, проходящей черезъ точки M_1, M_2 и O (на черт.18 указана пунктиромъ эта окружность и проведена прямая IV, описываемая точкой M').

Разсматриваемое движеніе воспроизводится въ приборѣ, который служитъ для черченія эллипсовъ и потому называется *"эллиптическимъ циркулемъ"*.

Для того, чтобы найти уравненіе кривой, которую данная *неподвижная точка* пространства (x, y) вычерчиваетъ на движущейся плоской фигурѣ, мы должны въ формулахъ (2) абсолютнымъ координатамъ x и y придать постоянныя значенія, соотвѣтствующія данной точкѣ, и исключить время. Очевидно, получимъ то же уравненіе (3).

$$f(x, y) = 0,$$

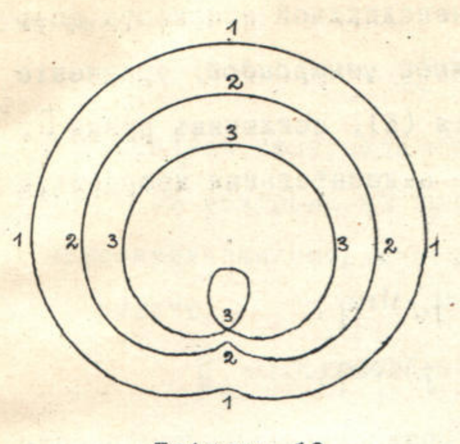
но перемѣнными въ этомъ уравненіи будутъ теперь уже ξ и η. Въ случаѣ *эллиптическаго циркуля* уравненіе кривой, вычерчиваемой неподвижной точкой, будетъ ур.(3_1); это уравненіе по отношенію къ перемѣннымъ ξ и η будетъ четвертой степени, слѣдовательно, соотвѣтствующая кривая будетъ четвертаго порядка и именно нѣкоторая эпитрохоида одной изъ формъ, изображенныхъ на черт. 19.

§ 2. *Скорости точекъ плоской фигуры.*

Проекціи скорости какой-либо точки плоской фигуры, на основаніи ур.(2) будутъ:

$$\left.\begin{aligned} v\cdot\cos(v,X) &= x' = x'_0 - (\xi\cdot\sin\varphi + \eta\cdot\cos\varphi)\cdot\varphi' = x'_0 - (y - y_0)\cdot\varphi', \\ v\cdot\cos(v,Y) &= y' = y'_0 + (\xi\cdot\cos\varphi - \eta\cdot\sin\varphi)\varphi' = y'_0 + (x - x_0)\varphi'. \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

Замѣчая, что первые члены въ выраженіяхъ x' и y' пред-



Чертежъ 19.

ставляютъ проекціи скорости точки O', а вторые члены - проекціи вращательной скорости вокругъ точки O', заключаемъ, что скорость точки фигуры равна геометрической суммѣ скорости точки O' и вращательной скорости вокругъ точки O'. Если v_0 обозначаетъ скорость точки O', а w - вращательную скорость вокругъ O', то

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{w}.$$

Точку O' называютъ *полюсомъ*, а полученная теорема можетъ быть формулирована такъ: скорость всякой точки фигуры равна геометрической суммѣ скорости полюса O' и вращательной скорости точки вокругъ этого полюса.

Найдемъ такую точку (x_0, y_0), скорость которой *равна нулю*. Для этого необходимо, чтобы:

$$x_0' + (y_c - y_0)\varphi' = 0,$$
$$y_0' + (x_c - x_0)\varphi' = 0;$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} x_c &= x_0 - \frac{y_0'}{\varphi'}, \\ y_c &= y_0 + \frac{x_0'}{\varphi'}. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

Изъ (5) слѣдуетъ, что *абсолютныя координаты* точки, скорость которой равна нулю, суть нѣкоторыя функціи времени; значитъ, въ плоскости неизмѣняемой фигуры въ каждый моментъ существуетъ такая точка, которая, принадлежа фигурѣ, или будучи неизмѣнно съ нею связана, имѣетъ въ этотъ моментъ скорость, равную нулю; эта точка и есть *мгновенный центръ*. Геометриче-

ское мѣсто мгновенныхъ центровъ на неподвижной плоскости есть кривая, которая называется *неподвижной центроидой;* уравненіе ея $F(x_0 y_0)=0$ получимъ изъ уравненія (5), исключивъ время t.

Пользуясь формулами, выражающими относительныя координаты точки черезъ абсолютныя:

$$\xi = (x-x_0)\cdot\cos\varphi+(y-y_0)\cdot\sin\varphi,$$
$$\eta = -(x-x_0)\cdot\sin\varphi+(y-y_0)\cdot\cos\varphi;$$

съ помощью уравненій (5) мы найдемъ *относительныя координаты мгновеннаго центра:*

$$\left.\begin{aligned}\xi_c &= -\frac{y_0'}{\varphi'}\cdot\cos\varphi+\frac{x_0'}{\varphi'}\cdot\sin\varphi=(x_0'\sin\varphi-y_0'\cos\varphi)\cdot\frac{1}{\varphi'},\\ \eta &= \frac{y_0'}{\varphi'}\cdot\sin\varphi+\frac{x_0'}{\varphi'}\cos\varphi=(x_0'\cos\varphi+y_0'\sin\varphi)\frac{1}{\varphi'}.\end{aligned}\right\}\ldots(6)$$

Исключивъ время (t) изъ уравн. (6), получимъ уравненіе:

$$\Phi(\xi_c,\eta)=0$$

кривой, которую мгновенный центръ вычерчиваетъ въ движущемся тѣлѣ, т.е. уравненіе *подвижной центроиды.*

Возьмемъ приведенный выше *примѣръ 2-ой: эллиптическій циркуль.*

$$x_0 = R\cdot\sin\varphi,$$
$$y_0 = R\cdot\cos\varphi,$$
$$\varphi = F(t).$$

Пользуясь формулами (5), находимъ абсолютныя координаты мгновеннаго центра:

$$\left.\begin{aligned}x_c &= R\sin\varphi+R\sin\varphi\cdot\frac{\varphi'}{\varphi'} = 2R\cdot\sin\varphi,\\ y_c &= R\cos\varphi+R\cdot\cos\varphi\cdot\frac{\varphi'}{\varphi'} = 2R\cdot\cos\varphi.\end{aligned}\right\}\cdots(5)$$

Исключивъ отсюда время, находимъ уравненіе *неподвижной*

центроиды:

$$x_c^2 + y_c^2 = 4R^2.$$

Неподвижная центроида есть, слѣдовательно, окружность радіуса $2R$ съ центромъ въ точкѣ O (черт. 20).

Относительныя координаты мгновеннаго центра на основаніи ур. (6) будутъ:

$$\xi_c = (R\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi + R\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi)\frac{\varphi'}{\varphi'} = R\cdot\sin 2\varphi,$$

$$\eta_c = (-R\cdot\sin^2\varphi + R\cdot\cos^2\varphi)\frac{\varphi'}{\varphi'} = R\cdot\cos 2\varphi.$$

Исключая t, получимъ уравненіе *подвижной центроиды:*

$$\xi_c^2 + \eta_c^2 = R^2.$$

Подвижная центроида есть, слѣдовательно, окружность радіуса R, съ центромъ въ точкѣ

Чертежъ 20.

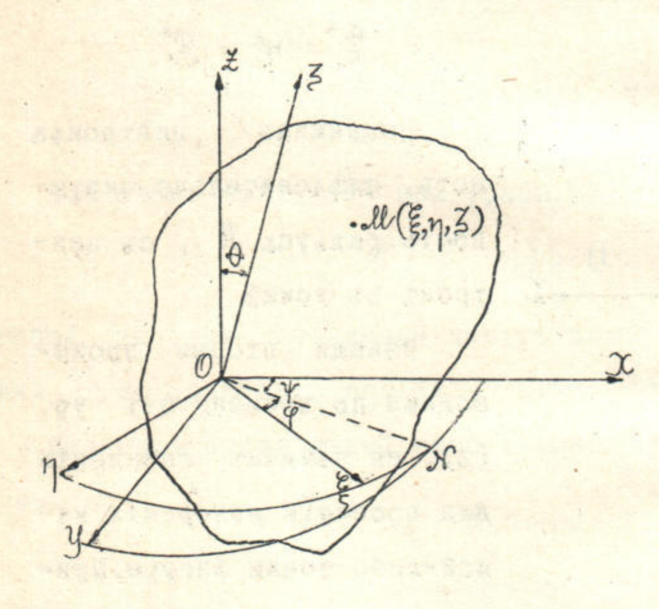
Взявши вторыя производныя по времени отъ ур. (2), мы найдемъ выраженія для проекцій *ускоренія* какой-либо точки фигуры. Приравнивая эти выраженія нулю, мы получимъ уравненія для опредѣленія координатъ точки, ускореніе которой въ моментъ t равно нулю; эта точка называется *центромъ ускореній.*

ГЛАВА V.

§ 1. *Вращенiе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки* *).

Беремъ двѣ прямоугольныя системы координатныхъ осей съ общимъ началомъ въ неподвижной точкѣ O : одна система, съ осями OX, OY, OZ, неподвижна въ пространствѣ, другая, съ осями $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, неизмѣнно связана съ тѣломъ (черт. 21).

Положенiе осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, мы опредѣляемъ слѣдующими тремя углами: угломъ $ZO\zeta=\theta$ **) и двумя углами, образуемыми осями $O\xi$ и OX съ прямой ON, по которой пересѣкаются плоскости XOY и $\xi O\eta$, т.е. угломъ $NO\xi=\varphi$ и угломъ $NOX=\psi$.



Чертежъ 21.

Эти углы будемъ отсчитывать слѣдующимъ образомъ: θ отъ OZ къ $O\zeta$, слѣва направо для наблюдателя, расположеннаго по ON; φ отъ ON къ $O\xi$ въ такую сторону, чтобы при переходѣ отъ $O\xi$ къ $O\eta$ уголъ φ возросталъ на $\frac{\pi}{2}$; ψ отъ OX къ ON въ ту сторону, гдѣ находится ось OY.

Примѣръ: Тѣло вращается равномѣрно съ угловой скоростью k

---

*) *Аналитическое разсмотрѣнiе движенiя, составляющее дополненiе къ соотвѣтствующей статьѣ первой части курса. См. "Теорет. Механика", ч. I.*

**) *Греческiя буквы: φ (фи), ψ (пси) и θ (тэта).*

вокругъ оси $O\zeta$, которая сама равномѣрно вращается съ угловой скоростью n вокругъ оси Oz , оставаясь къ ней перпендикулярной.

Пусть въ моментъ $t=0$ ось $O\zeta$ находится въ плоскости zOx , тогда уравненія движенія будутъ:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi = kt,$$
$$\psi = \frac{\pi}{2} + n\cdot t.$$

При вращеніи тѣла вокругъ точки O углы θ , φ , ψ , измѣняются съ теченіемъ времени, а потому уравненія движенія тѣла будутъ:

$$\theta = f_1(t)\ ,\ \varphi = f_2(t)\ ,\ \psi = f_3(t)\ \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Косинусы девяти угловъ между направленіями осей абсолютныхъ и относительныхъ координатъ обозначимъ для краткости буквами a , b , c со значками 1, 2, 3, какъ видно изъ слѣдующей таблицы:

	x	y	z
ξ	a_1	a_2	a_3
η	b_1	b_2	b_3
ζ	c_1	c_2	c_3

Эти девять косинусовъ связаны между собою шестью равенствами (2) и (3)

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\left.\begin{aligned} a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3&=0,\\ a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1&=0,\\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2&=0 \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)\ ^{*)}$$

---

*) *Равенствамъ (2) и (3) равносильны в равенствъ (2_1) и (3_1)*

$$\left.\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+a_3^2&=1,\\ b_1^2+b_2^2+b_3^2&=1,\\ c_1^2+c_2^2+c_3^2&=1, \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2_1)$$

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3&=0,\\ b_1\cdot c_1+b_2\cdot c_2+b_3\cdot c_3&=0,\\ a_1c_1+a_2c_2\ \ a_3c_3&=0. \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (3_1)$$

Преобразуя постепенно координатную систему $OXYZ$ *въ систему* $O\xi\eta\zeta$*, получимъ слъдующія выраженія для девяти* COS-*овъ черезъ три угла* θ, φ, ψ :

$$a_1=\cos\varphi\cdot\cos\psi-\sin\varphi\cdot\sin\psi\cdot\cos\theta,$$

$$a_2=\cos\varphi\cdot\sin\psi+\sin\varphi\cdot\cos\psi\cdot\cos\theta,$$

$$a_3=\sin\varphi\cdot\sin\theta;$$

$$b_1=-\sin\varphi\cdot\cos\psi-\cos\varphi\cdot\sin\psi\cdot\cos\theta,$$

$$b_2=-\sin\varphi\cdot\sin\psi+\cos\varphi\cdot\cos\psi\cdot\cos\theta,$$

$$b_3=\cos\varphi\cdot\sin\theta;$$

$$c_1=\sin\psi\cdot\sin\theta,$$

$$c_2=-\cos\psi\cdot\sin\theta,$$

$$c_3=\cos\theta.$$

Въ вышеуказанномъ примъръ:

$$a_1=-\cos kt\cdot\sin nt,\ a_2=\cos kt\cdot\cos nt,\ \ a_3=\sin kt;$$

$$b_1=\sin kt\cdot\sin nt,\ \ b_2=-\sin kt\cdot\cos nt,\ \ b_3=\cos kt;$$

$$c_1=\cos nt\ \ \ \ ,\ c_2=\sin nt\ \ ,\ c_3=0.$$

Относительныя координаты точки связаны съ абсолютными слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta, \\ y &= a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta, \\ z &= a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Приведенныя здѣсь формулы извѣстны уже изъ курса аналитической геометріи.

Уравненія траекторіи точки M (ξ , η , ζ) мы получимъ изъ уравн. (4), придавъ ξ , η , ζ *постоянныя* значенія и исключивъ время, которое входитъ въ выраженіе косинусовъ. Полученныя два уравненія будутъ выражать, очевидно, нѣкоторую сферическую кривую.

Уравненія кривой, которую *неподвижная точка* (x , y , z) пространства вычерчиваетъ внутри движущагося тѣла, получимъ, когда въ уравн. (4) координатамъ x , y , z придадимъ постоянныя значенія и исключимъ время. Очевидно, получатся тѣ же самыя (по виду) уравненія, что и для траекторіи точки M (ξ , η , ζ), но перемѣнными въ нихъ будутъ уже ξ , η , ζ , а x , y , z , - постоянными.

Примѣчаніе: Для нахожденія этой кривой можно, конечно, воспользоваться уравн. (5), выражающими относительныя координаты черезъ абсолютныя:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a_1x + a_2y + a_3z, \\ \eta &= b_1x + b_2y + b_3z, \\ \zeta &= c_1x + c_2y + c_3z; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Исключивъ отсюда время, получимъ уравненія кривой.

§ 2. *Скорости точекъ тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки.*

Дифференцированіемъ по времени находимъ изъ уравн(4) для проекцій скорости v точки тѣла M (ξ , η , ζ) слѣдующія выраженія *):

$$\left.\begin{aligned} v\cdot\cos(v,X) &= \frac{dx}{dt} = a_1'\xi + b_1'\eta + c_1'\zeta, \\ v\cdot\cos(v,Y) &= \frac{dy}{dt} = a_2'\xi + b_2'\eta + c_2'\zeta, \\ v\cdot\cos(v,Z) &= \frac{dz}{dt} = a_3'\xi + b_3'\eta + c_3'\zeta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots(6)$$

гдѣ

$$a_1' = \frac{da_1}{dt}, \quad b_1' = \frac{db_1}{dt}, \quad c_1' = \frac{dc_1}{dt},$$

$$a_2' = \frac{da_2}{dt}, \quad b_2' = \frac{db_2}{dt}, \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ и т.д.}$$

Чтобы вывести нѣкоторыя свойства скорости v , преобразуемъ формулы (6), подставивъ вмѣсто ξ , η , ζ , ихъ выраженія изъ уравн.(5); - получимъ:

$$\frac{dx}{dt} = x(a_1a_1' + b_1b_1' + c_1c_1') + y(a_2a_1' + b_2b_1' + c_2c_1') + z(a_3a_1' + b_3b_1' + c_3c_1'), \cdots (\alpha)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(a_1a_2' + b_1b_2' + c_1c_2') + y(a_2a_2' + b_2b_2' + c_2c_2') + z(a_3a_2' + b_3b_2' + c_3c_2'), \ldots (\beta)$$

$$\frac{dz}{dt} = x(a_1a_3' + b_1b_3' + c_1c_3') + y(a_2a_3' + b_2b_3' + c_2c_3') + z(a_3a_3' + b_3b_3' + c_3c_3'), \ldots (\gamma)$$

Замѣчаемъ, что коэффиціенты при x въ формулѣ (α), при y въ (β) и при z въ (γ) равны нулю; въ самомъ дѣлѣ, взявши первыя производныя по времени отъ уравн.(2), находимъ по сокращеніи на два:

---

*) *Для каждой точки тѣла ея относительныя координаты* ξ , η , ζ *сохраняютъ постоянныя значенія при движеніи тѣла.*

$$\left.\begin{aligned} a_1 a'_1 + b_1 b'_1 + c_1 c'_1 &= 0, \\ a_2 a'_2 + b_2 b'_2 + c_2 c'_2 &= 0, \\ a_3 a'_3 + b_3 b'_3 + c_3 c'_3 &= 0: \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Кромѣ того, дифференцируя по времени уравн. (3), находимъ слѣдующія зависимости между остальными коэффиціентами при x, y, z, въ формулахъ (α), (β), (γ):

$$\left.\begin{aligned} a_2 a'_3 + b_2 b'_3 + c_2 c'_3 &= -(a_3 a'_2 + b_3 b'_2 + c_3 c'_2), \\ a_3 a'_1 + b_3 b'_1 + c_3 c'_1 &= -(a_1 a'_3 + b_1 b'_3 + c_1 c'_3), \\ a_1 a'_2 + b_1 b'_2 + c_1 c'_2 &= -(a_2 a'_1 + b_2 b'_1 + c_2 c'_1). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (8)$$

Обозначимъ для сокращенія письма лѣвыя части равенствъ (8) черезъ $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, такъ что:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{P} &= a_2 a'_3 + b_2 b'_3 + c_2 c'_3, \\ \mathcal{Q} &= a_3 a'_1 + b_3 b'_1 + c_3 c'_1, \\ \mathcal{R} &= a_1 a'_2 + b_1 b'_2 + c_1 c'_2. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (8')$$

Тогда на основаніи уравн. (7), (8) и (8') мы получимъ слѣдующія выраженія для проекцій скорости какой-либо точки тѣла:

$$\left.\begin{aligned} v\cos(v,X) &= z\mathcal{Q} - y\mathcal{R}, \\ v\cos(v,Y) &= x\mathcal{R} - z\mathcal{P}, \\ v\cos(v,Z) &= y\mathcal{P} - x\mathcal{Q}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (9)$$

[**Въ примѣрѣ**: $\mathcal{P} = k\cos nt$, $\mathcal{Q} = k\sin nt$, $\mathcal{R} = n$].

Изъ выраженія (9) выведемъ нѣкоторыя *заключенія:*

Координаты (x, y, z) точки тѣла, *скорость* которой *равна нулю,* должны удовлетворять слѣдующимъ условіямъ:

$$\begin{aligned} z\mathcal{Q} - y\mathcal{R} &= 0, \\ x\mathcal{R} - z\mathcal{P} &= 0, \\ y\mathcal{P} - x\mathcal{Q} &= 0. \end{aligned}$$

или

$$\frac{y}{Q} = \frac{z}{R}; \quad \frac{z}{R} = \frac{x}{P}; \quad \frac{x}{P} = \frac{y}{Q} \quad \ldots\ldots\ldots (\delta)$$

Такъ какъ одно изъ уравненій (δ) есть слѣдствіе двухъ другихъ, то мы имѣемъ здѣсь два уравненія съ тремя неизвѣстными

$$\frac{x}{P} = \frac{y}{Q} = \frac{z}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Изъ уравн. (10) слѣдуетъ, что координаты x, y, z, точки, скорость которой равна нулю, связаны двумя уравненіями первой степени; значитъ, существуетъ безчисленное множество точекъ, скорость которыхъ равна нулю. Всѣ эти точки лежатъ на прямой, проходящей черезъ начало координатъ, которая и выражается уравненіями (10). Если перемѣнной t дадимъ опредѣленное значеніе, то P, Q, R, получатъ опредѣленныя значенія, и уравн. (10) выразятъ прямую, которая называется *мгновенной осью* тѣла для соотвѣтствующаго момента времени.

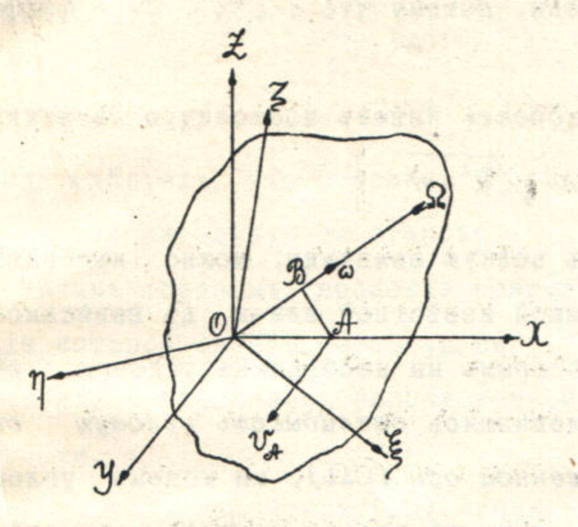
Мгновенная ось съ теченіемъ времени мѣняетъ свое направленіе въ пространствѣ, такъ какъ P, Q, R - функціи времени. (Въ примѣрѣ уравненія мгновенной оси будутъ:

$$\frac{x}{k \cdot \cos nt} = \frac{y}{k \cdot \sin nt} = \frac{z}{n} \Big].$$

Направленіе мгновенной оси обозначимъ черезъ Ω; на черт. 22 мгновенную ось представляетъ прямая $O\Omega$. На основаніи ур. (10) направленіе мгновенной оси (Ω) опредѣлимъ по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\Omega, X) &= \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \\ \cos(\Omega, Y) &= \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \\ \cos(\Omega, Z) &= \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Угловая скорость ω, съ которой тѣло вращается вокругъ мгновенной оси, равна*) отношенію скорости какой-либо точки тѣла къ ея кратчайшему разстоянію до оси.



Чертежъ 22.

Возьмемъ точку тѣла A, лежащую въ разсматриваемый моментъ времени на оси OX въ разстояніи отъ начала координатъ, равномъ единицѣ ($x=1, y=0, z=0$); кратчайшее ея разстояніе AB до оси $O\Omega$ обозначимъ черезъ h:

$$AB = h.$$

Очевидно:

$$h = OA \cdot \sin(\widehat{AOB}) = 1\sqrt{1-\cos^2(\Omega, X)} = \sqrt{\frac{Q^2+R^2}{P^2+Q^2+R^2}}.$$

На основаніи формулъ (9) проекціи скорости точки будутъ:

$$v_A \cdot \cos(v_A, X) = 0,$$

$$v_A \cos(v_A, Y) = xR = R,$$

$$v_A \cos(v_A, Z) = -xQ = -Q,$$

откуда

$$v_A = \sqrt{P^2+Q^2}.$$

Такимъ образомъ, угловая скорость ω выразится слѣдующей формулой:

$$\omega = \frac{v_A}{h} = \sqrt{P^2+Q^2+R^2} \quad \text{.........} \quad (12)$$

---

*) *См. "Теоретическая Механика", часть I.*

Изъ уравн. (12) слѣдуетъ, что угловая скорость ω , вообще говоря, зависитъ отъ времени, потому что $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ - функціи времени.

[Въ *примѣрѣ* угловая скорость имѣетъ постоянную величину

$$\omega = \sqrt{k^2 + n^2}\ ].$$

Угловую скорость, какъ всякую величину, можно изображать *графически* - отрѣзкомъ прямой извѣстной длины, въ зависимости отъ длины того отрѣзка, которымъ мы изобразимъ угловую скорость, равную единицѣ. Условившись *откладывать угловую скорость по направленію мгновенной оси* $(O\Omega)$, мы можемъ угловую скорость ω разсматривать, какъ нѣкоторый *векторъ*, а, слѣдовательно, можемъ и *проектировать* ее на координатныя оси; - получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \omega\cos(\omega,X) &= \sqrt{\mathcal{P}^2+\mathcal{Q}^2+\mathcal{R}^2}\cdot\frac{\mathcal{P}}{\sqrt{\mathcal{P}^2+\mathcal{Q}^2+\mathcal{R}^2}} = \mathcal{P}, \\ \omega\cos(\omega,Y) &= \sqrt{\mathcal{P}^2+\mathcal{Q}^2+\mathcal{R}^2}\cdot\frac{\mathcal{Q}}{\sqrt{\mathcal{P}^2+\mathcal{Q}^2+\mathcal{R}^2}} = \mathcal{Q}, \\ \omega\cos(\omega,Z) &= \sqrt{\mathcal{P}^2+\mathcal{Q}^2+\mathcal{R}^2}\cdot\frac{\mathcal{R}}{\sqrt{\mathcal{P}^2+\mathcal{Q}^2+\mathcal{R}^2}} = \mathcal{R}. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (13)$$

Уравненія (13) даютъ намъ кинематическое значеніе тѣхъ аналитическихъ выраженій, которыя мы выше обозначили черезъ $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, именно: $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ *и* $\mathcal{R}$ *представляютъ проекціи угловой скорости на координатныя оси* OX , OY *и* OZ .

Чтобы рѣшить вопросъ относительно того, въ *какую сторону* тѣло будетъ вращаться для наблюдателя, расположеннаго по мгновенной оси, предположимъ, что на одинъ моментъ мы взяли ось OZ, совпадающею съ мгновенной осью, и найдемъ, въ какую сторону направлена скорость точки A ?

Такъ какъ угловая скорость направлена по OZ , то $\mathcal{P}=0$, $\mathcal{Q}=0$ и $\mathcal{R}>0$, слѣдовательно, по форм. (9):

$$v_A \cos(v_A, X) = 0,$$

$$v_A \cos(v_A, Y) = R,$$

$$v_A \cos(v_A, Z) = 0.$$

откуда слѣдуетъ, что скорость v_A направлена параллельно оси OY въ положительную ея сторону.

Такимъ образомъ, вращенiе вокругъ мгновенной оси, направленiе которой опредѣляется уравн.(11), происходитъ *слѣва направо* для наблюдателя, расположеннаго по направленiю угловой скорости.

Исключивъ изъ уравн.(10) время, мы получимъ уравненiе поверхности - *неподвижнаго аксоида.*

[Въ *примѣрѣ* - неподвижный аксоидъ будетъ круглый конусъ, ось котораго есть ось OZ :

$$x^2 + y^2 - \frac{k^2}{n^2} z^2 = 0.]$$

Чтобы получить уравненiе *подвижного аксоида,* мы должны найти проекцiи угловой скорости ω на координатныя оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, движущiяся вмѣстѣ съ тѣломъ:

$$\left.\begin{aligned} \omega\cdot\cos(\omega,\xi) &= p = a_1P + a_2Q + a_3R, \\ \omega\cdot\cos(\omega,\eta) &= q = b_1P + b_2Q + b_3R, \\ \omega\cdot\cos(\omega\,\zeta) &= r = c_1P + c_2Q + c_3R. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(14)$$

По формуламъ (14) найдемъ p , q , r , и тогда уравненiя мгновенной оси въ относительныхъ координатахъ будутъ:

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

Исключивъ изъ уравн.(15) время, получимъ уравненiе *подвижного аксоида:*

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Проекціи скорости v какой-либо точки тѣла, имѣющей координаты ξ, η, ζ, на оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, выражаются черезъ ξ, η, ζ формулами, подобными формуламъ (9):

$$v\cdot\cos(v,\xi) = \zeta\cdot q - \eta\cdot r,$$
$$v\cdot\cos(v,\eta) = \xi\cdot r - \zeta\cdot p,$$
$$v\cdot\cos(v,\zeta) = \eta\cdot p - \xi\cdot q.$$

(Въ *примѣрѣ* имѣемъ: $p = n\cdot\sin kt$, $q = n\cdot\cos kt$, $r = k$.]

Уравненія мгновенной оси въ относительныхъ координатахъ будутъ:

$$\frac{\xi}{n\cdot\sin kt} = \frac{\eta}{n\cdot\cos kt} = \frac{\zeta}{k};$$

отсюда, уравненіе подвижного аксоида

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{n^2}{k^2}\cdot\zeta^2 = 0.$$

слѣдовательно, подвижной аксоидъ есть круглый конусъ, ось котораго совпадаетъ съ осью $O\zeta$).

ГЛАВА VI.

ДВИЖЕНІЕ СВОБОДНАГО ТВЕРДАГО ТѢЛА.

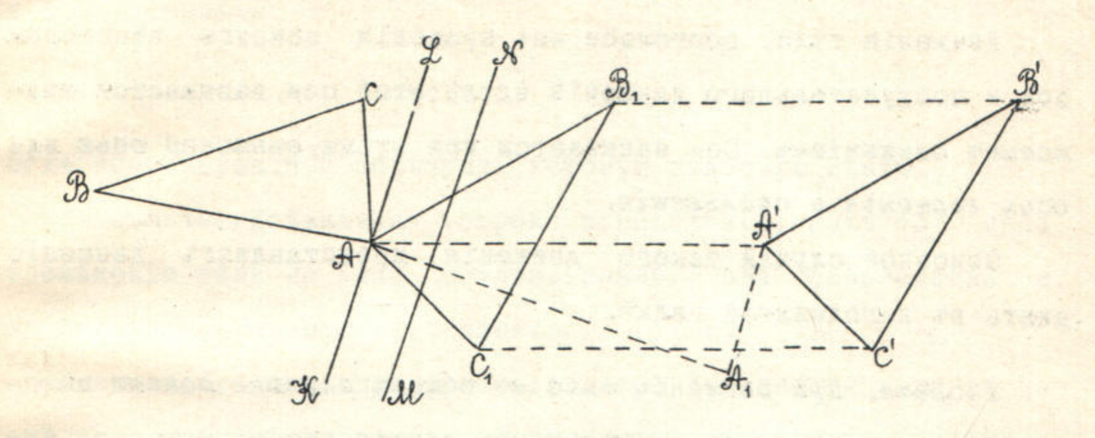
(Общій случай движенія твердаго тѣла).

§ 1. *Геометрическое рѣшеніе.*

Положеніе свободнаго твердаго тѣла вполнѣ опредѣляется положеніемъ *трехъ его точекъ, не лежащихъ на одной прямой.*

Теорема. При движеніи тѣла въ общемъ случаѣ всякое положеніе тѣла можетъ быть получено изъ какого-угодно другого по-

ложенія посредствомъ двухъ движеній: ***вращенія вокругъ нѣкоторой оси и движенія поступательнаго (прямолинейнаго).***



Чертежъ 23.

Пусть A, B, C будутъ положенія трехъ точекъ тѣла при первомъ его положеніи, A', B', C' - при второмъ (черт. 23). Очевидно, $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $A'C' = AC$. Знаемъ, *) что *вращая* тѣло вокругъ нѣкоторой оси KL, проходящей черезъ точку A, можемъ перевести треугольникъ ABC въ такое положеніе AB_1C_1, при которомъ сторона $AB_1 \# A'B'$, $AC_1 \# A'C'$, $B_1C_1 \# B'C'$. Тогда прямыя, соединяющія соотвѣтственныя вершины треугольниковъ AB_1C_1 и $A'B'C'$ будутъ равны и параллельны: $AA' \# B_1B' \# C_1C'$; вслѣдствіе этого мы можемъ разсматриваемый треугольникъ (а вмѣстѣ съ нимъ и тѣло) изъ положенія AB_1C_1 перевести въ положеніе $A'B'C'$ *поступательнымъ движеніемъ* по прямой AA', такъ какъ, когда A, двигаясь по AA', перейдетъ въ A', то точки B_1 и C_1 перейдутъ въ B' и C'.

------- " -------

---

*) *См. "Теоретическая Механика", часть I.*

Движенiе тѣла, состоящее изъ вращенiя вокругъ нѣкоторой оси и поступательнаго движенiя вдоль этой оси, называется *винтовымъ движенiемъ*. Ось называется при этомъ *винтовой осью* или *осью вращенiя и скольженiя*.

Основной случай такого движенiя представляетъ движенiе винта въ неподвижной гайкѣ.

Теорема. При движенiи тѣла въ общемъ случаѣ всякое положенiе его можетъ быть получено изъ какого-угодно другого положенiя посредствомъ винтового движенiя вокругъ нѣкоторой оси.

Намъ нужно доказать, что вращенiе вокругъ оси KL и поступательное движенiе по направленiю AA' (см. черт. 23) можно замѣнить винтовымъ движенiемъ вокругъ нѣкоторой оси.

Замѣнимъ поступательное движенiе по прямой AA' двумя поступательными движенiями: переведемъ сначала точку A прямолинейнымъ движенiемъ изъ A въ A_1, а затѣмъ изъ A_1 прямолинейнымъ же движенiемъ въ A', причемъ $AA_1 \perp KL$, а $A_1A' \parallel KL$. Очевидно, вращательное движенiе тѣла вокругъ оси KL и поступательное движенiе его, перпендикулярное къ KL, составляютъ вмѣстѣ движенiе, паралельное неподвижной плоскости (перпендикулярной къ KL); а перемѣщенiе тѣла при такомъ движенiи, какъ мы знаемъ, всегда можно замѣнить вращенiемъ вокругъ нѣкоторой оси $MN \parallel KL$. Присоединяя къ этому движенiю поступательное движенiе по A_1A', которая паралельна MN, мы и получимъ въ результатѣ *винтовое движенiе* тѣла.

Соотвѣтствующiй винтъ можно легко *построить* слѣдующимъ образомъ: возьмемъ круглый цилиндръ, ось котораго будетъ MN (черт. 24), а радiусъ равенъ единицѣ длины; пусть φ будетъ тотъ уголъ (выраженный въ частяхъ радiуса), на который тѣло

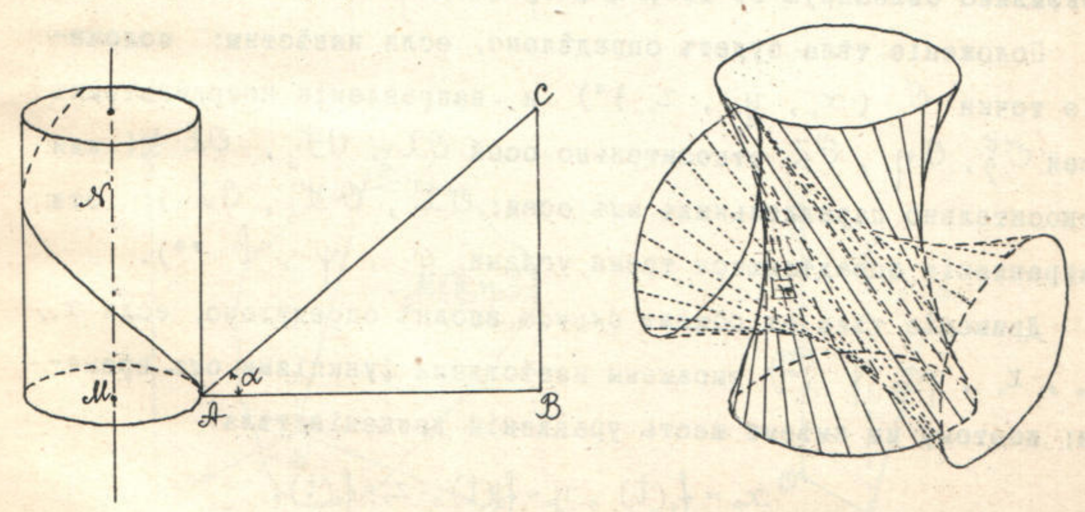
должно быть повернуто около оси; навернемъ на цилиндръ прямоугольный треугольникъ ABC , въ которомъ уголъ α опредѣляется изъ уравненія:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1A'}{\varphi}$$

тогда гипотенуза AC образуетъ искомую винтовую линію.

Слѣдствіе. Доказанная теорема справедлива, какъ бы мало перемѣщеніе тѣла не было, слѣдовательно, она справедлива и *для безконечно-малаго перемѣщенія.*

Такимъ образомъ, при разсматриваемомъ движеніи тѣло въ началѣ и въ концѣ каждаго безконечно-малаго промежутка времени Δt занимаетъ такія два положенія, что изъ перваго во второе оно можетъ быть перемѣщено посредствомъ винтового движенія около нѣкоторой оси; поэтому движеніе тѣла въ общемъ случаѣ можетъ быть разсматриваемо, какъ предѣльный случай ряда послѣдовательныхъ винтовыхъ движеній; при этомъ ось винта измѣняетъ съ теченіемъ времени свое положеніе и въ пространствѣ и внутри тѣла. Эта ось называется *мгновенной винтовой осью,* или *мгновенной осью вращенія и скольженія.* Мгновенная винтовая



Чертежъ 24. *Чертежъ 25.*

ось описываетъ при своемъ движеніи двѣ линейчатыхъ поверхности, - одну въ самомъ движущемся тѣлѣ, другую въ пространствѣ;

первая поверхность называется *подвижнымъ аксоидомъ мгновенныхъ винтовыхъ осей* (или "подвижнымъ аксоидомъ мгновенныхъ осей вращенія и скольженія"), вторая, - *неподвижнымъ аксоидомъ мгновенныхъ винтовыхъ осей* (или "неподвижнымъ аксоидомъ мгновенныхъ осей вращенія и скольженія").

Простѣйшій случай такихъ аксоидовъ представляютъ два однополыхъ *гиперболоида* (черт.25). Въ каждый моментъ времени оба аксоида имѣютъ, очевидно, общую производящую, которая и служитъ мгновенной винтовой осью для этого момента; кромѣ того, она является въ то же время осью скольженія. Движеніе тѣла въ общемъ случаѣ можно разсматривать, какъ результатъ соединенія *катанія* подвижного аксоида винтовыхъ осей по аксоиду неподвижному со *скольженіемъ* вдоль по общей производящей.

§ 2. *Аналитическое рѣшеніе.*

Беремъ двѣ системы координатныхъ осей: одну (OX, OY, OZ) неподвижную въ пространствѣ и другую ($O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$), неизмѣнно связанную съ тѣломъ (черт.26).

Положеніе тѣла будетъ опредѣлено, если извѣстны: положеніе точки O' (x_0, y_0, z_0)*) и направленіе координатныхъ осей $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$ относительно осей OX, OY, OZ (или относительно параллельныхъ имъ осей: $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$); эти направленія опредѣляются тремя углами: φ, ψ, θ **).

Движеніе тѣла въ *общемъ случаѣ* вполнѣ опредѣлено, если x_0, y_0, z_0, φ, ψ, θ выражены извѣстными функціями отъ времени; поэтому мы имѣемъ шесть уравненій движенія тѣла:

$$x_0 = f_1(t)\ ,\ y_0 = f_2(t)\ ,\ z_0 = f_3(t)\ ;$$

---

*) *Точку* O' *часто называютъ полюсомъ.*

**) *Черезъ* φ , ψ *и* θ *обозначимъ тѣ же углы, что и въ случаѣ движенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.*

$$\varphi = F_1(t),\ \psi = F_2(t),\ \theta = F_3(t).$$

Всѣ изложенные выше случаи движенія твердаго тѣла могутъ быть разсматриваемы какъ *частные случаи* движенія, выражаемаго шестью написанными уравненіями:

для поступательнаго движенія:

$$F_1(t) = F_2(t) = F_3(t) = 0;$$

для вращенія около неподвижной оси (OZ):

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = F_2(t) = F_3(t) = 0;$$

для движенія, параллельнаго неподвижной плоскости (XOY):

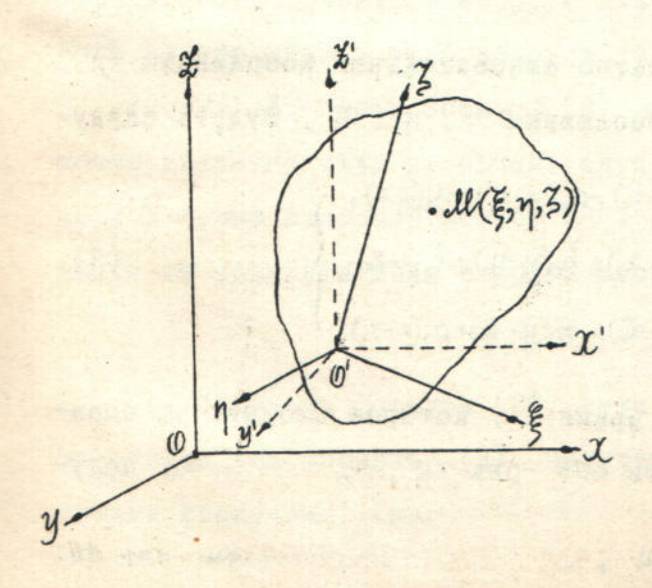
$$f_3(t) = F_2(t) = F_3(t) = 0;$$

для движенія вокругъ неподвижной точки (O):

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = 0.$$

Примѣръ 1. Винтовое движеніе тѣла около оси OZ выражается уравненіями:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ z_0 = kt,$$
$$\varphi = nt,\ \psi = 0,\ \theta = 0.$$



Чертежъ 26.



Чертежъ 27.

Примѣръ 2. Тѣло равномѣрно вращается съ угловой скоростью k вокругъ оси $O'Z$, которая не находится въ одной плоскости съ неподвижной осью OZ (черт.27); пусть $OO'=a$ будетъ кратчайшее разстояніе между этими осями; положимъ, что ось $O'Z$ неизмѣнно скрѣплена со стержнемъ, который расположенъ по OO' и вращается вокругъ оси OZ равномѣрно съ угловой скоростью n; тогда уголъ θ будетъ постоянный (α); предполагая, что въ моментъ $t=0$, ось $O'Z$ находится въ плоскости $Z'O'X'$, мы получимъ слѣдующія уравненія движенія тѣла:

$$x_0=a\cdot\cos nt,\ y_0=a\cdot\sin nt,\ z_0=0,$$

$$\theta=\alpha,\ \varphi=k\cdot t,\ \psi=\frac{\pi}{2}+nt.$$

Основныя формулы, выражающія абсолютныя координаты x, y, z какой-либо точки M черезъ ея относительныя координаты ξ, η, ζ, будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0+a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta, \\ y &= y_0+a_2\xi+b_2\eta+c_2\zeta, \\ z &= z_0+a_3\xi+b_3\eta+c_3\zeta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)^*)$$

Формулы, выражающія обратно относительныя координаты ξ, η, ζ черезъ координаты абсолютныя x, y, z, будутъ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0), \\ \eta &= b_1(x-x_0)+b_2(y-y_0)+b_3(z-z_0), \\ \zeta &= c_1(x-x_0)+c_2(y-y_0)+c_3(z-z_0). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Исключая изъ уравн.(1) время t, которое входитъ въ выраженія x_0, y_0, z_0 и девяти $\cos$-овъ a_1, a_2 .... c_3, полу-

---

*) *Значенія* a_1, b_1, c_1, ... *см. стр.50.*

чимъ два уравненія *траекторіи* точки M. Тѣ же уравненія, если считать въ нихъ перемѣнными относит. координаты ξ, η, ζ, а постоянными абсол. координаты x, y, z, будутъ уравненіями *кривой*, вычерчиваемой въ тѣлѣ какой-либо неподвижной точкой (x, y, z) пространства.

Взявши производныя по времени отъ уравн. (1), мы получимъ слѣдующія выраженія для проекцій скорости точки $M(\xi, \eta, \zeta)$ тѣла на оси абсолютныхъ координатъ:

$$\left.\begin{aligned} v\cdot\cos(v,X) &= \frac{dx}{dt} = x_0' + a_1'\xi + b_1'\eta + c_1'\zeta, \\ v\cdot\cos(v,Y) &= \frac{dy}{dt} = y_0' + a_2'\xi + b_2'\eta + c_2'\zeta, \\ v\cdot\cos(v,Z) &= \frac{dz}{dt} = z_0' + a_3'\xi + b_3'\eta + c_3'\zeta, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3)$$

гдѣ

$$x_0' = \frac{dx_0}{dt}, \quad a_1' = \frac{da_1}{dt}, \ldots\ldots$$

По этимъ формуламъ можемъ найти и величину и направленіе скорости точки M. Первые члены уравн. (3): x_0', y_0', z_0' суть проекціи скорости полюса O', остальные же выражаютъ проекціи той скорости точки M, которую она имѣла бы, если бы точка O' была неподвижна, а тѣло вокругъ нея вращалось.

Такимъ образомъ, формулы (3) показываютъ, что *скорость точки* твердаго тѣла въ общемъ случаѣ движенія равна геометрической суммѣ *скорости полюса* (v_0) *и вращательной скорости* (w) точки во вращеніи тѣла вокругъ этого полюса:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{w}.$$

Преобразуемъ формулы (3), подставивъ вмѣсто ξ, η, ζ ихъ выраженія изъ формулъ (2). Получимъ, очевидно, формулы, аналогичныя формуламъ (9):

$$\left.\begin{aligned} v\cdot\cos(v,X) &= x_0' + (z-z_0)Q - (y-y_0)R, \\ v\cdot\cos(v,Y) &= y_0' + (x-x_0)R - (z-z_0)P, \\ v\cdot\cos(v,Z) &= z_0' + (y-y_0)P - (x-x_0)Q, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

гдѣ P , Q , R имѣютъ тѣ же значенія, что и въ случаѣ вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки; какъ и тамъ, *угловая скорость* тѣла опредѣляется по величинѣ и направленію изъ формулъ:

$$\omega = \sqrt{P^2+Q^2+R^2},$$

$$\cos(\omega,X) = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},$$

$$\cos(\omega,Y) = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},$$

$$\cos(\omega,Z) = \frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}.$$

(Въ нашемъ *примѣрѣ*

$$P = k\cdot\sin\alpha\cdot\cos nt,$$

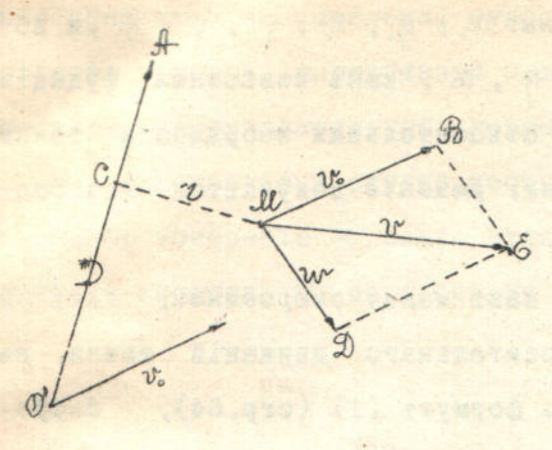
$$Q = k\cdot\sin\alpha\cdot\sin nt,$$

$$R = n + k\cdot\cos\alpha,$$

и угловая скорость имѣетъ постоянную величину:

$$\omega = \sqrt{k^2+n^2+2kn\cdot\cos\alpha}\ ).$$

Основываясь на томъ, что скорость точки твердаго тѣла въ общемъ случаѣ движенія равна геометрической суммѣ скорости полюса и вращательной скорости вокругъ этого полюса, легко *построить* эту скорость. Пусть O' будетъ полюсъ, v_0 скорость полюса и $O'A=\omega$ угловая скорость тѣла (черт.28). Желая построить скорость какой-либо точки тѣла M , проводимъ изъ M отрѣзокъ $MB \# v$. Чтобы найти вращательную скорость (ω) точки M, опустимъ перпендикуляръ MC на $O'A$; пусть $MC=r$, тог-



Чертежъ 28.

да по величинѣ $w = r \cdot \omega$; эту величину мы отложимъ по перпендикуляру къ плоскости, проходящей черезъ точку M и ось OA, такъ чтобы для наблюдателя, расположеннаго по оси, она была направлена слѣва направо; получимъ прямую MD, которая и будетъ представлять вращательную скорость w. Построивъ на MD и MB параллелограммъ, получимъ діагональ ME, которая и будетъ изображать скорость (v) точки M.

ГЛАВА VII.

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ ВЪ ОБЩЕМЪ СЛУЧАѢ.

При разсмотрѣніи относительнаго движенія точки представляются, какъ мы видѣли, двѣ главныя задачи:

1, Даны: движеніе тѣла и относительное движеніе точки, - требуется опредѣлить ея абсолютное движеніе;

2, Даны: движеніе тѣла и абсолютное движеніе точки, - требуется опредѣлить ея относительное движеніе.

Въ случаѣ относительнаго движенія точки по отношенію къ твердому тѣлу, которое движется *какъ угодно*, - въ *первой* задачѣ *даны* x_0, y_0, z_0, φ, ψ, θ, и относительныя координаты точки - ξ, η, ζ, какъ извѣстныя функціи времени; нужно найти абсолютныя координаты точки - x, y, z, какъ функція времени; - *рѣшеніе* получается непосредственное изъ формулъ (1)

(стр.64), *во второй* задачѣ *даны:* x_0, y_0, z_0, φ, ψ, θ, и абсолютныя координаты точки x, y, z, какъ извѣстныя функціи времени; требуется опредѣлить относительныя координаты точки ξ, η, ζ въ функціяхъ времени; *рѣшеніе* получается изъ формулы (2) (стр.64).

Соотношенія, существующія какъ между *скоростями*, такъ и ускореніями абсолютнаго и относительнаго движеній точки, *въ общемъ случаѣ*, мы получимъ изъ формулъ (1) (стр.64), *дифференцируя по времени:* для скоростей - одинъ разъ, для ускореній - два раза, причемъ здѣсь координаты ξ, η, ζ мы должны считать *перемѣнными;* въ результатѣ получимъ извѣстныя уже *зависимости* (a) *и* (b):

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{v}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

- абсолютная скорость точки равна геометрической суммѣ ея относительной скорости и скорости той точки тѣла, съ которой она совпадаетъ;

$$\bar{\dot{v}} = \bar{\dot{u}} + \bar{\dot{v}}_1 + \bar{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

- абсолютное ускореніе точки равно геометрической суммѣ трехъ ускореній: ускоренія относительнаго, ускоренія той точки тѣла, съ которой она совпадаетъ, и ускоренія Коріолисова или добавочнаго.

Проекціи добавочнаго ускоренія k на координатныя оси выражаются по формуламъ:

$$k\cdot\cos(k,X) = 2(a_1'\xi' + b_1'\eta' + c_1'\zeta'),$$

$$k\cdot\cos(k,Y) = 2(a_2'\xi' + b_2'\eta' + c_2'\zeta'),$$

$$k\cdot\cos(k,Z) = 2(a_3'\xi' + b_3'\eta' + c_3'\zeta').$$

Коріолисово или добавочное ускореніе k, *какъ видно изъ этихъ формулъ, и въ общемъ случаѣ такъ же, какъ въ разсмотрѣнномъ ранѣе частномъ случаѣ, равно по величинѣ и направле-*

нію удвоенной вращательной скорости той точки тѣла, радіусъ-векторъ которой, проведенный изъ полюса, равенъ по величинѣ и направленію относительной скорости u.

За исключеніемъ случая поступательнаго движенія тѣла, добавочное ускореніе k равно нулю только тогда, когда относительная скорость u параллельна мгновенной оси.

Г Л А В А VIII.

СЛОЖЕНІЕ ДВИЖЕНІЙ ТВЕРДАГО ТѢЛА.

§ 1.

Если тѣло 1-ое совершаетъ нѣкоторое *относительное* движеніе по отношенію къ тѣлу 2-ому и затѣмъ, вслѣдствіе движенія 2-го тѣла, - движеніе *переносное* со 2-ымъ, то абсолютное движеніе 1-го тѣла называютъ *составнымъ движеніемъ, получившимся отъ сложенія двухъ составляющихъ движеній: относительнаго и переноснаго.*

Нерѣдко 2-ое тѣло, относительно котораго разсматривается движеніе 1-го тѣла, замѣняется тремя координатными осями, неизмѣнно со 2-ымъ тѣломъ связанными и съ нимъ вмѣстѣ движущимися; тогда относительное движеніе 1-го тѣла складывается съ движеніемъ этихъ координатныхъ осей.

Могутъ представиться случаи, когда приходится складывать *три движенія*: тѣло 1-ое совершаетъ относительное движеніе по отношенію къ тѣлу 2-му, затѣмъ переносное движеніе со вторымъ тѣломъ въ движеніи его по отношенію къ 3-му тѣлу, и, наконецъ, переносное движеніе вмѣстѣ съ 3-имъ тѣломъ; въ этомъ случаѣ

абсолютное движеніе тѣла будетъ *движеніе составное изъ трехъ составляющихъ движеній.*

Вообще можно разсматривать движеніе тѣла, *составное изъ сколькихъ-угодно составляющихъ движеній.*

Извѣстно, что скорость точки въ составномъ движеніи равняется по величинѣ и направленію геометрической суммѣ ея скоростей въ составляющихъ движеніяхъ.

Въ случаѣ *двухъ* движеній, обозначая черезъ u скорость точки въ относительномъ движеніи, черезъ w скорость ея въ движеніи переносномъ, черезъ v - скорость въ движеніи составномъ, имѣемъ:

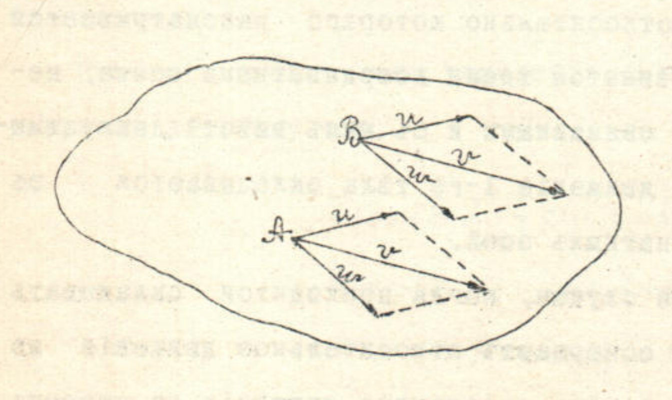
$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$$

Примѣняя эту теорему къ той или другой точкѣ разсматриваемаго тѣла, мы будемъ въ состояніи по даннымъ составляющимъ движеніямъ тѣла *опредѣлить* его составное движеніе.

§ 2. *Сложеніе поступательныхъ движеній.*

Пусть тѣло совершаетъ *два поступательныхъ движенія*: относительное со скоростью u и переносное со скоростью w; найдемъ составное движеніе тѣла.

Въ первомъ составляющемъ движеніи тѣла всѣ точки тѣла имѣютъ одну и ту же скорость u, а во второмъ составляющемъ движеніи -скорость w. Возьмемъ въ тѣлѣ какія-либо двѣ точки A и B (черт. 29).



Чертежъ 29.

Скорость точекъ A и B въ составномъ движеніи суть геометри -

ческія суммы ихъ скоростей въ составляющихъ движеніяхъ, т.е. по величинѣ и направленію изображаются діагоналями параллелограммовъ, соотвѣтственно построенныхъ на скоростяхъ u и w точекъ A и B .

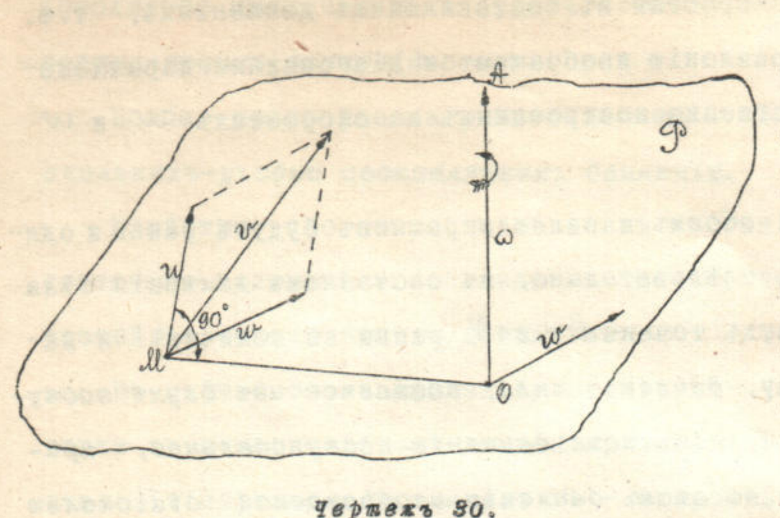
Діагонали (v) обоихъ параллелограммовъ будутъ равны и одинаково направлены; слѣдовательно, въ составномъ движеніи тѣла скорости любыхъ двухъ точекъ A и B равны по величинѣ и направленію; поэтому, *движеніе тѣла, составное изъ двухъ поступательныхъ движеній, есть тоже движеніе поступательное, причемъ скорость тѣла въ этомъ движеніи изображается діагональю параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ составляющихъ движеній.*

Выведенный результатъ можетъ быть, очевидно, распространенъ на скорости *сколькихъ-угодно* составляющихъ поступательныхъ движеній: движеніе тѣла, составное изъ сколькихъ угодно поступательныхъ движеній, есть также движеніе поступательное; скорость этого поступательнаго движенія равняется *геометрической суммѣ* скоростей составляющихъ движеній: по величинѣ и направленію она изображается замыкающей многоугольника, стороны котораго имѣютъ величины и направленія скоростей составляющихъ движеній.

§ 3. *Сложеніе движеній: вращательнаго вокругъ нѣкоторой оси и поступательнаго по направленію, перпендикулярному къ этой оси.*

Пусть тѣло совершаетъ вращательное движеніе вокругъ оси OA съ угловой скоростью ω , и переносное поступательное со скоростью w , причемъ $w \perp OA$ (черт.30).

Составное движеніе тѣла будетъ движеніе, *параллельное* неподвижной плоскости, перпендикулярной къ оси вращенія тѣла.



Чертежъ 30.

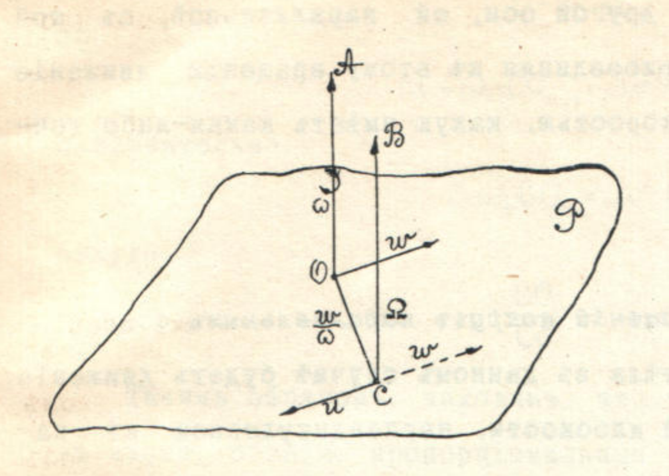
Проведемъ плоскость $\mathcal{P}$, перпендикулярную къ оси вращенія OA; отъ точки O, вдоль по оси, отложимъ угловую скорость тѣла ω въ такомъ направленіи, чтобъ наблюдатель, расположенный по этому направленію, видѣлъ вращеніе происходящимъ *слѣва направо*. Скорость какой-нибудь точки тѣла M, взятой въ плоскости $\mathcal{P}$, въ составномъ движеніи равна геометрической суммѣ ея скоростей u и w. Такъ какъ $\mathcal{P} \perp OA$, то u направлена въ плоскости $\mathcal{P}$ перпендикулярно къ MO и равна:

$$u = \omega \cdot MO;$$

если изъ точки M проведемъ линію, равную и параллельную w и на u и w построимъ параллелограммъ, то діагональ этого параллелограмма (v), лежащая въ плоскости $\mathcal{P}$, и будетъ скорость точки M въ составномъ движеніи.

Найдемъ въ плоскости $\mathcal{P}$ такую точку (C) тѣла, скорость которой *равна нулю* (черт. 31).

Ясно, что скорости u и w такой точки должны быть равны и направлены по одной прямой въ противоположныя стороны. Для того, чтобы u была равна w, должно быть $OC = \frac{w}{\omega}$ (такъ какъ $u = \omega \cdot OC$; для того, чтобы u и w были направлены по одной прямой, OC должно быть $\perp w$ (такъ какъ $u \perp OC$); наконецъ, для того, чтобы u и w были направлены въ противоположныя стороны, OC должна быть направлена въ такую сторону, чтобы скорость w точки C оставалась вправо для наблюдателя, располо-



Чертежъ 31.

женнаго по OC и смотрящаго на OA. Построенная такимъ образомъ точка C и будетъ (мгновеннымъ) центромъ вращенія.

Всѣ точки тѣла, лежащія на прямой CB, параллельной оси OA, будутъ въ составномъ движеніи тѣла въ данный моментъ въ покоѣ, т.е. CB будетъ (мгновенной) осью вращенія тѣла.

Опредѣлимъ *угловую скорость* Ω, съ которой тѣло въ составномъ движеніи вращается вокругъ оси CB.

Возьмемъ точку тѣла O. Скорость этой точки въ составномъ движеніи тѣла равна w, такъ какъ ея скорость u равна нулю. При вращеніи тѣла вокругъ оси CB скорость точки O равна $\Omega . OC$, поэтому

$$\Omega . OC = w,$$

откуда

$$\Omega = \frac{w}{OC};$$

а такъ какъ

$$OC = \frac{w}{\omega},$$

то

$$\Omega = \omega.$$

слѣдовательно, разсматриваемое составное движеніе тѣла есть вращеніе тѣла вокругъ оси BC съ той же угловой скоростью ω, какъ и составляющее вращеніе вокругъ оси OA.

Изъ предыдущаго мы можемъ обратно сдѣлать слѣдующее заключеніе: вращеніе тѣла вокругъ нѣкоторой оси можно всегда замѣ-

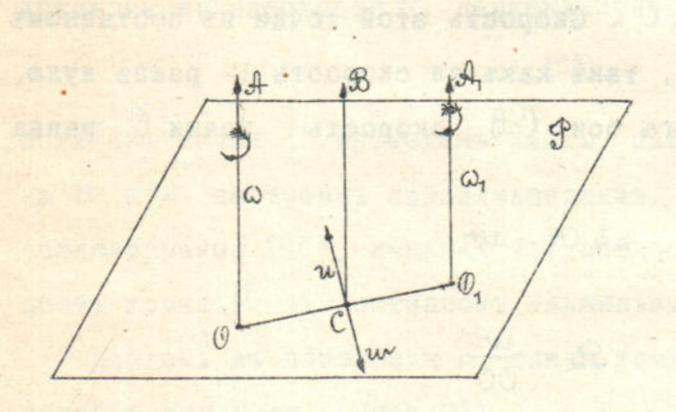
нить вращеніемъ вокругъ другой оси, ей параллельной, съ той же угловой скоростью, присоединяя къ этому вращенію движеніе поступательное съ той скоростью, какую имѣетъ какая-либо точка новой оси.

§ 4. *Сложеніе вращеній вокругъ параллельныхъ осей.*

Составное движеніе тѣла въ данномъ случаѣ будетъ движеніе, параллельное неподвижной плоскости, перпендикулярной къ направленію осей.

Первый случай: *два составляющія вращенія тѣла происходятъ въ одну и ту же сторону.*

Пусть угловая скорость переносного вращательнаго движенія тѣла вокругъ оси OA будетъ ω, относительнаго вокругъ оси O_1A_1.... ω_1 (черт.32). Въ плоскости $\mathcal{P}$, перпендикулярной къ OA и O_1A_1 долженъ существовать (мгновенный) центръ C. Скорость точки C въ составномъ движеніи равна нулю, но, какъ абсолютная скорость всякой точки, она равна геометрической суммѣ двухъ скоростей w и u, соотвѣтствующихъ вращеніямъ вокругъ осей OA и O_1A_1; поэтому скорости w и u точки C должны быть равны и направлены по одной прямой въ противоположныя стороны.



Чертежъ 32.

Точка, удовлетворяющая этимъ условіямъ, находится на прямой OO_1, между точками O и O_1 причемъ разстоянія ея CO_1 и CO должны быть таковы, чтобы

$$w = u,$$

но

$$u = \omega_1 \cdot CO_1 \ , \ w = \omega CO;$$

слѣдовательно,

$$\omega_1 CO_1 = \omega \cdot CO$$

откуда

$$\frac{CO_1}{CO} = \frac{\omega}{\omega_1}.$$

Такимъ образомъ, находимъ, что точка C дѣлитъ прямую OO_1 на части, обратно пропорціональныя угловымъ скоростямъ составляющихъ вращеній.

Прямая CB, параллельная OA и O_1A_1 будетъ осью составного вращенія; слѣдовательно, отъ сложенія вращенія вокругъ двухъ параллельныхъ осей въ одну и ту же сторону получается *вращеніе въ ту же сторону вокругъ оси, имъ параллельной, причемъ центръ вращенія дѣлитъ прямую, соединяющую центры данныхъ вращеній, на части обратно-пропорціональныя угловымъ скоростямъ этихъ вращеній.*

Покажемъ, что въ данномъ случаѣ *угловая скорость* Ω составного движенія равна суммѣ угловыхъ скоростей составляющихъ движеній.

Точка O_1 въ относительномъ движеніи имѣетъ скорость u равную нулю; поэтому скорость этой точки въ составномъ движеніи равна переносной ея скорости w:

$$w = \omega \cdot OO_1.$$

При вращеніи же вокругъ оси CB въ составномъ движеніи скорость точки O_1 равна $\Omega \cdot CO_1$; слѣдовательно:

$$\omega \cdot OO_1 = \Omega \cdot CO_1$$

или

$$\omega(CO + CO_1) = \Omega \cdot CO_1;$$

принявъ во вниманіе выше выведенное равенство

$$\omega \cdot CO = \omega_1 \cdot CO_1 ,$$

получаемъ

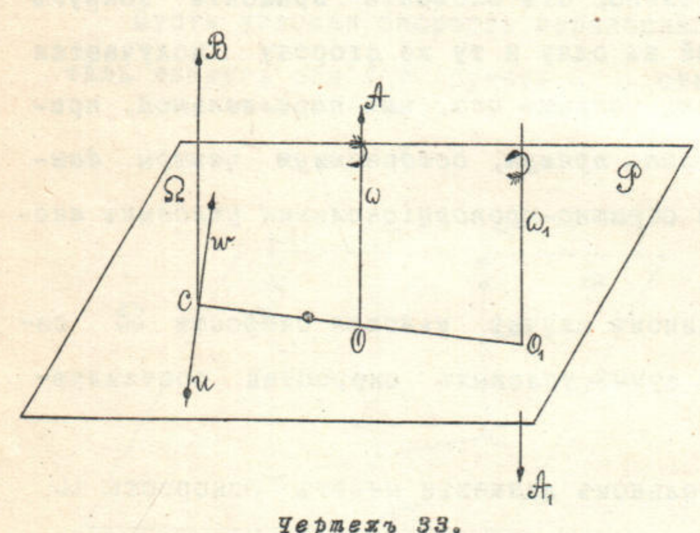
$$\omega_1 \cdot CO_1 + \omega \cdot CO_1 = \Omega \cdot CO_1 ;$$

откуда

$$\omega_1 + \omega = \Omega .$$

Примѣчаніе. Отмѣтимъ полную аналогію полученнаго вывода съ результатомъ сложенія двухъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ одну сторону.

Второй случай: *два составляющія вращенія происходятъ въ разныя стороны съ различными угловыми скоростями* (черт.32).



Чертежъ 33.

Положимъ $\omega > \omega_1$. Плоскость P перпендикулярна къ OA и O_1A_1. Найдемъ въ плоскости P точку C (*мгновенный центръ*), скорость которой въ составномъ движеніи равна нулю.

Очевидно, *скорости* этой точки въ составляющихъ движеніяхъ u и w должны быть направлены по одной прямой въ противоположныя стороны и равны между собою. Поэтому точка C должна лежать на линіи OO_1 съ внѣшней стороны точекъ O и O_1, ближе къ той оси, вокругъ которой угловая скорость вращенія больше Скорости точки C при вращеніи вокругъ осей CA и O_1A_1 будутъ соотвѣтственно:

$$w = \omega \cdot CO ,$$
$$u = \omega_1 \cdot CO_1 ;$$

слѣдовательно,

$$\omega \cdot CO = \omega_1 \cdot CO_1 ;$$

откуда

$$\frac{CO_1}{CO} = \frac{\omega}{\omega_1} \quad ;$$

Такимъ образомъ, получимъ: *мгновенный центръ лежитъ на прямой, соединяющей центры данныхъ вращеній съ внѣшней стороны ближе къ оси, для которой угловая скорость вращенія больше, и разстоянія мгновеннаго центра до центровъ данныхъ вращеній обратно пропорціональны соотвѣтственнымъ угловымъ скоростямъ.* Линія CB , параллельная OA и O_1A_1 будетъ осью составного вращенія.

Угловая скорость Ω вокругъ оси CB равна разности угловыхъ скоростей составляющихъ движеній.

Дѣйствительно, скорость точки O_1 въ составномъ движеніи должна быть равна

$$w = \omega \cdot OO_1 ,$$

такъ какъ для нея

$$u = 0 ;$$

при вращеніи же вокругъ оси CB скорость точки O_1 будетъ равна ΩCO_1 ; слѣдовательно:

$$\Omega \cdot CO_1 = \omega \cdot OO_1 ;$$

вмѣсто OO_1 подставимъ ($CO_1 - CO$), тогда

$$\Omega \cdot CO_1 = \omega \cdot CO_1 - \omega \cdot CO ,$$

но

$$\omega \cdot CO = \omega_1 \cdot CO_1 ;$$

Поэтому

$$\Omega \cdot CO_1 = \omega \cdot CO_1 - \omega_1 \cdot CO_1$$

откуда

$$\Omega = \omega - \omega_1$$

Примѣчаніе. Отмѣтимъ и здѣсь полную аналогію полученнаго

вывода съ результатомъ сложенія двухъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ разныя стороны.

Третій случай: *вращенія происходятъ въ разныя стороны съ равными угловыми скоростями.*

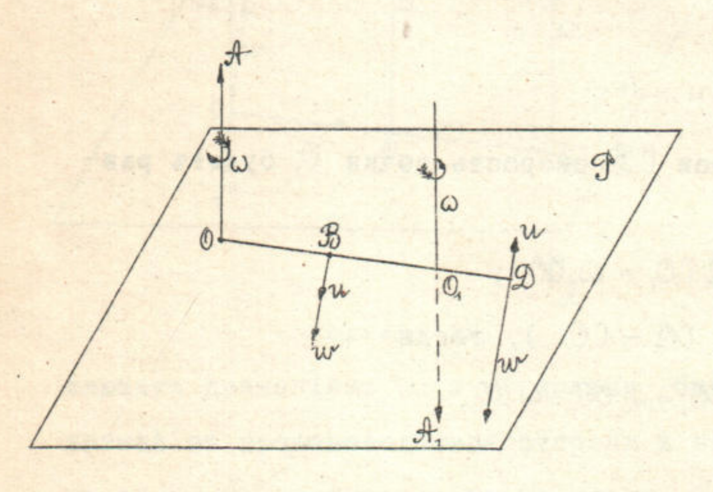
Примѣняя къ данному случаю результаты, выведенные для случая неравныхъ угловыхъ скоростей, получимъ, что въ данномъ случаѣ угловая скорость составного движенія равна нулю, а соотвѣтствующая ось вращенія находится въ безконечности. Покажемъ, что составное движеніе тѣла будетъ движеніе *поступательное.*

Возьмемъ точку B на прямой OO_1 (черт.34). Скорость точки B при вращеніи вокругъ оси O_1A_1 будетъ:

$$u = \omega \cdot BO_1 ,$$

при вращеніи вокругъ оси OA будетъ:

$$w = \omega \cdot BO$$



Чертежъ 34.

Такъ какъ u и w направлены по прямой, перпендикулярной къ OO_1, въ одну сторону, то составная скорость v точки B будетъ перпендикулярна къ OO_1 и равна суммѣ скоростей u и w.

$$v = \omega \cdot (BO_1 + BO) = \omega \cdot OO_1 .$$

Возьмемъ на прямой OO_1 другую точку D . Скорость ея при вращеніи вокругъ оси O_1A_1 будетъ:

$$u = \omega \cdot O_1D ,$$

при вращеніи вокругъ оси OA будетъ:

$$w = \omega \cdot OD ,$$

но скорости u и w точки D направлены по прямой, перпендикулярной къ OO_1 въ разныя стороны; поэтому

$$v = w - u = \omega(OD - O_1D) = \omega \cdot OO_1 .$$

Видимъ, что скорости двухъ точекъ тѣла B и D въ плоскости P равны по величинѣ и направленію; отсюда заключаемъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ *тѣло движется поступательно по направленію, перпендикулярному къ плоскости, заключающей оси данныхъ вращеній, причемъ скорость поступательнаго движенія равняется произведенію величины угловой скорости на кратчайшее разстояніе между осями.*

Примѣчаніе. Этотъ случай вполнѣ аналогиченъ парѣ параллельныхъ силъ; поэтому его иногда называютъ *"парой вращенія"*.

Полученные выводы относительно сложенія вращеній вокругъ *двухъ* параллельныхъ осей легко распространяются на случай сложенія *сколькихъ-угодно вращеній* вокругъ параллельныхъ осей.

§ 5. *СЛОЖЕНІЕ ВРАЩЕНІЙ ВОКРУГЪ ОСЕЙ, ПЕРЕСѢКАЮЩИХСЯ ВЪ ОДНОЙ ТОЧКѢ.*

Пусть тѣло вращается вокругъ нѣкоторой оси KL и затѣмъ участвуетъ въ переносномъ вращательномъ движеніи вокругъ оси MN, которая въ точкѣ O пересѣкаетъ ось KL (черт.35).

Даны угловыя скорости тѣла:

вокругъ оси KL .... ω_1 ;

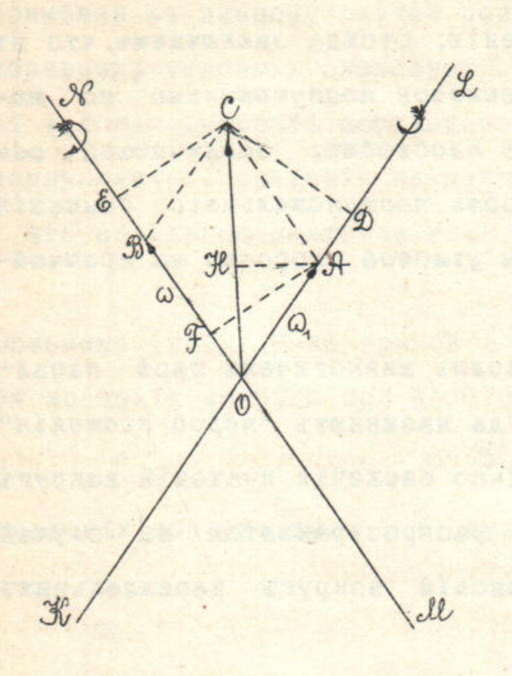
" " MN .... ω .

Эти угловыя скорости изобразимъ нѣкоторыми отрѣзками и отложимъ ихъ по соотвѣтственнымъ осямъ отъ точки O въ такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположеннаго по этому на-

правленію, соотвѣтствующее вращеніе тѣла происходило слѣва направо; пусть

$$\omega_1 = OA \qquad \omega = OB$$

Такъ какъ въ обоихъ составляющихъ движеніяхъ точка O неподвижна, то составное движеніе будетъ вращеніе вокругъ неподвижной точки O, и, слѣдовательно, въ составномъ движеніи тѣла существуетъ мгновенная ось.



Чертежъ 35.

Найдемъ *направленіе этой оси.* Построимъ на угловыхъ скоростяхъ ω и ω_1 параллелограммъ $OABC$. Докажемъ, что скорость точки C въ составномъ движеніи *равна нулю.* Опустимъ изъ точки C на оси KL и MN перпендикуляры CD и CB. Скорость точки C при вращеніи вокругъ оси KL будетъ:

$$u = \omega_1 CD;$$

при вращеніи вокругъ оси MN будетъ:

$$w = \omega \cdot CE.$$

Замѣчаемъ, что

$$\omega_1 CD = 2\triangle OAC,$$

и

$$\omega \cdot CE = 2\triangle OBC.$$

Изъ равенства треугольниковъ OAC и OBC слѣдуетъ

$$\omega_1 \cdot CD = \omega \cdot CE,$$

$$u = w.$$

Такъ какъ вращенiе тѣла вокругъ осей KL и MN происходитъ слѣва направо, то скорости u и w точки C будутъ направлены перпендикулярно къ плоскости чертежа въ противоположныя стороны; поэтому геометрическая сумма равныхъ по величинѣ скоростей u и w, представляющая скорость точки C въ составномъ движенiи, равна нулю.

Очевидно, всѣ точки прямой OC будутъ имѣть скорости, равныя нулю, поэтому прямая OC и будетъ *осью составного вращенiя*.

Такимъ образомъ находимъ, что ось *вращенiя, полученнаго отъ сложенiя вращенiя вокругъ двухъ пересѣкающихся осей, направлена по дiагонали параллелограмма, построеннаго на угловыхъ скоростяхъ составляющихъ вращенiй.*

Опредѣлимъ *угловую скорость* Ω составного вращенiя тѣла вокругъ оси OC. Для этого удобно взять точку A, такъ какъ скорость ея въ составномъ движенiи найти весьма просто. Дѣйствительно, скорость точки A при вращенiи вокругъ оси KL будетъ:

$$u = 0;$$

а вокругъ оси MN будетъ:

$$w = \omega \cdot AF,$$

гдѣ AF перпендикулярна къ направленiю MN; поэтому скорость составного движенiя (v) точки A равна $\omega \cdot AF$; при вращенiи же тѣла вокругъ оси OC съ угловой скоростью Ω скорость точки A будетъ равна $\Omega \cdot AH$, гдѣ AH разстоянiе точки A отъ оси OC по перпендикуляру къ этой оси; слѣдовательно:

$$\Omega \cdot AH = \omega \cdot AF;$$

но произведеніе $\omega \cdot AF$ представляетъ площадь параллелограмма $OABC$, которую можно также выразить произведеніемъ $OC \cdot AH$; поэтому имѣемъ:

$$\Omega . AH = OC . AH;$$

откуда

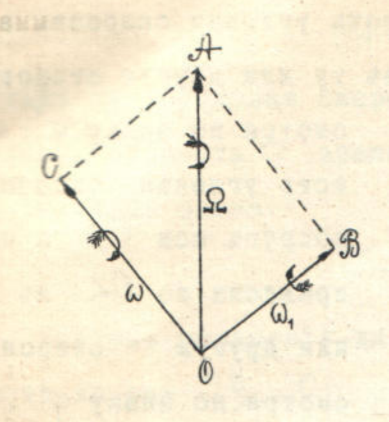
$$\Omega = OC.$$

Такимъ образомъ находимъ, что *угловая скорость составного вращенія, полученнаго отъ сложенія вращеній вокругъ двухъ пересѣкающихся осей, изображается не только по направленію, но и по величинѣ діагональю параллелограмма, построеннаго на угловыхъ скоростяхъ составляющихъ вращеній.*

Примѣчаніе. Замѣтимъ, что при сложеніи двухъ силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, мы имѣли аналогичный результатъ.

Обратный вопросъ - о разложеніи даннаго вращенія вокругъ неподвижной оси на два составляющихъ вращенія вокругъ осей, пересѣкающихся съ первой осью въ одной точкѣ, рѣшается также аналогично тому, какъ въ статикѣ рѣшался вопросъ о разложеніи данной силы на двѣ составляющія.

Пусть тѣло вращается вокругъ оси OA съ угловой скоростью Ω (черт.36). Разложеніе этого вращенія на два составляющихъ вращенія вокругъ осей, проходящихъ черезъ точку O, будетъ опредѣленнымъ, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда заданы величина и направленіе угловой скорости ω одного изъ составляющихъ вращеній; тогда геометрическимъ вычитаніемъ вектора ω изъ вектора Ω найдемъ величину и направленіе угловой скорости ω_1 - второго составляющаго вращенія. Въ статикѣ отъ сложенія двухъ силъ по правилу параллелограмма мы переходили къ сложенію сколькихъ-угодно силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ; также и здѣсь отъ сложенія угловыхъ скоростей двухъ вращеній по правилу параллелограмма можемъ перейти къ сложенію



Чертежъ 36.

скольких-угодно вращенiй вокругъ осей, проходящихъ черезъ одну точку; въ результатѣ получимъ слѣдующую теорему: *угловая скорость составного вращенiя, полученнаго отъ сложенiя скольких-угодно вращенiй вокругъ осей, пересѣкающихся въ одной точкѣ, по величинѣ и направленiю равна геометрической суммѣ угловыхъ скоростей составляющихъ вращенiй и изображается замыкающей многоугольника, стороны котораго имѣютъ величины и направленiя данныхъ угловыхъ скоростей.*

Какъ *примѣръ* сложенiя вращенiй тѣла вокругъ *трехъ осей*, разсмотримъ *вращенiе тѣла вокругъ неподвижной точки.*

Примемъ эту точку какъ за начало неподвижныхъ координатныхъ ссей OX, OY, OZ, такъ и за начало подвижныхъ координатныхъ осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, неизмѣнно связанныхъ съ тѣломъ. (Черт.37). Направленiя подвижныхъ координатныхъ осей опредѣляются по отношенiю къ осямъ неподвижнымъ, какъ уже извѣстно, углами φ, ψ и θ. При вращенiи тѣла углы φ, ψ и θ съ теченiемъ времени измѣняются, а потому:

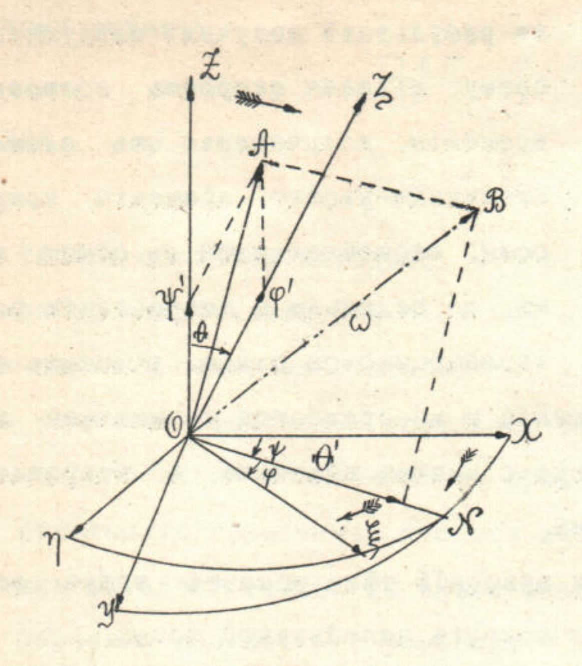
$$\theta = f_3(t)\ ,\ \psi = f_2(t)\ ,\ \varphi = f_1(t).$$

Дифференцируя эти функцiи по t, получимъ выраженiя θ', ψ' и φ', представляющiя угловыя скорости вращенiй тѣла вокругъ осей, проходящихъ черезъ точку O и перпендикулярныхъ къ плоскостямъ $ZO\zeta$, XOY и $\xi O\eta$, въ которыхъ соотвѣтствующiе углы находятся; такимъ образомъ, θ' есть угловая скорость вокругъ оси ON и направлена по прямой ON *) въ ту или дру-

---

*) *Прямая ON, какъ пересѣченiе плоскостей XOY и $\xi O\eta$, перпендикулярна къ $O\zeta$ и OZ, а, слѣдовательно, и къ плоскости $ZO\zeta$.*

гую сторону, смотря по знаку θ'; ψ' есть угловая скорость вокругъ оси OZ и направлена по OZ въ ту или другую сторону, смотря по знаку ψ'; φ' есть угловая скорость вокругъ оси $O\zeta$ и направлена по $O\zeta$ въ ту или другую сторону, смотря по знаку φ'.



Чертежъ 37.

Складывая три вращенія тѣла вокругъ осей ON, OZ и $O\zeta$, получимъ составное вращеніе *вокругъ точки* O съ угловой скоростью ω, которая равна геометрической суммѣ скоростей θ', ψ' и φ':

$$\bar{\omega} = \bar{\varphi}' + \bar{\psi}' + \bar{\theta}'.$$

Отсюда слѣдуетъ, что *проекція* угловой скорости ω на какую-либо ось равна алгебраической суммѣ проекцій на эту ось угловыхъ скоростей φ', ψ' и θ', направленія которыхъ выше указаны.

Чтобы получить угловую скорость ω, сначала сложимъ по правилу параллелограмма угловыя скорости φ' и ψ', а затѣмъ полученную угловую скорость OA сложимъ съ угловою скоростью θ', - найдемъ:

$$\omega = OB. \quad *)$$

Угловая скорость OA по величинѣ будетъ равна

---

*) *На чертежѣ направленія угловыхъ скоростей взяты такія, которыя соотвѣтствуютъ положительнымъ значеніямъ производныхъ:* φ', ψ', θ'.

$$OA = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + 2\varphi'\psi'\cos\theta}\ ,$$

а такъ какъ угловая скорость θ' перпендикулярна къ OA, то угловая скорость ω вращенія тѣла вокругъ неподвижной точки по величинѣ равна:

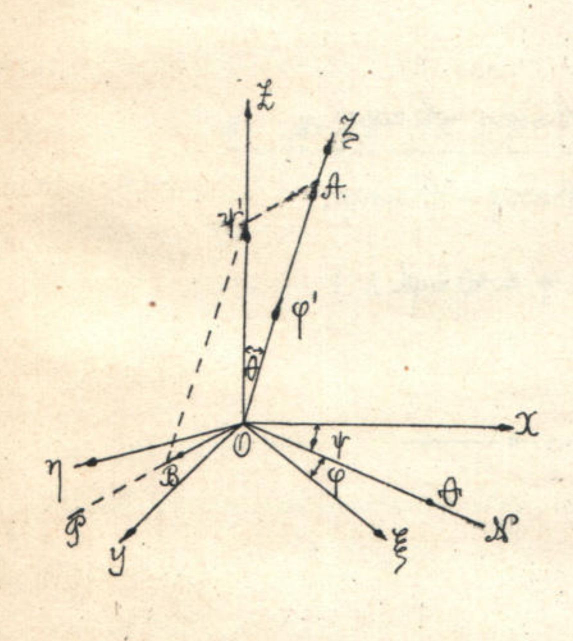
$$\omega = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2 + 2\varphi'\psi'\cos\theta}\ .$$

Найдемъ выраженія для *проекцій:* p, q, r угловой скорости на оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, связанныя съ тѣломъ, черезъ углы φ, ψ, θ и ихъ первыя производныя по времени φ', ψ', θ'.

Пусть OP (черт. 38) будетъ прямая пересѣченія плоскости $zO\zeta$ съ плоскостью $\xi O\eta$; эта прямая составляетъ прямые углы, какъ съ осью $O\zeta$, такъ и съ прямой ON. Угловую скорость ψ' вокругъ оси Oz разложимъ на двѣ: OA по оси $O\zeta$ и OB по прямой OP; получимъ:

$$OA = \psi'\cos\theta,$$

$$OB = \psi'\sin\theta.$$



Чертежъ 38.

Тогда угловая скорость тѣла будетъ разложена на три угловыя скорости:

по оси $O\zeta$ . . . . $\psi'\cos\theta + \varphi'$,

по оси ON . . . . θ',

по оси OP . . . . $\psi'\sin\theta$.

Беремъ суммы проекцій этихъ составляющихъ угловыхъ скоростей на оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Такъ какъ

$$\angle \mathcal{P}O\xi = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

$$\angle \mathcal{P}O\eta = \varphi,$$

$$\angle \mathcal{P}O\zeta = \frac{\pi}{2},$$

$$\angle \mathcal{N}O\xi = \varphi,$$

$$\angle \mathcal{N}O\eta = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

$$\angle \mathcal{N}O\zeta = \frac{\pi}{2},$$

то мы находимъ:

$$p = \psi' \sin\theta \cdot \sin\varphi + \theta' \cos\varphi,$$

$$q = \psi' \sin\theta \cdot \cos\varphi - \theta' \sin\varphi,$$

$$r = \psi' \cos\theta + \varphi'.$$

-------"-------

К И Н Е Т И К А.

(Д И Н А М И К А).

Принципы Кинетики изложены въ первой части Курса Теоретической Механики (стр. 164 - 170, 1914 г.).

Тамъ же (на страницѣ 170) формулированы двѣ главныя задачи Кинетики точки:

I. Дано движенiе матерiальной точки; требуется опредѣлить силу, подъ влiянiемъ которой это движенiе совершается.

II. Дана сила, приложенная къ матерiальной точкѣ; требуется опредѣлить движенiе, которое подъ влiянiемъ этой силы точка совершаетъ.

Первая задача рѣшается легко: (способъ ея рѣшенiя указанъ на стр. 170 - 173 первой части). Рѣшенiе второй задачи, вообще говоря, несравненно труднѣе.

Разсмотримъ эту задачу прежде всего въ случаѣ прямолинейнаго движенiя.

КИНЕТИКА ТОЧКИ.

ГЛАВА I.

ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНІЕ.

Матеріальная точка совершаетъ прямолинейное движеніе тогда, и только тогда, когда сила, къ ней приложенная (или равнодѣйствующая силъ, если ихъ нѣсколько), во все время движенія направлена по одной прямой, по которой направлена скорость точки въ одинъ какой-либо моментъ времени.

Въ самомъ дѣлѣ, если точка движется прямолинейно, то скорость ея въ каждый моментъ направлена по одной и той же прямой, а, слѣдовательно, по той прямой, по которой направлена скорость точки въ одинъ какой-либо моментъ; по той же прямой, очевидно, направлено и ускореніе, а, слѣдовательно, сила должна быть направлена все время по той же прямой.

Прямую, по которой точка движется, принимаемъ за ось OX;

Въ нашей задачѣ дана сила, значитъ задана ея проекція X*) въ видѣ одного изъ слѣдующихъ выраженій:

$$P(\text{пост.}), f(t), f(x), f(x'), f(t,x), f(t,x'), f(x,x'), f(t,x,x');$$

---

*) X *представляетъ величину силы, взятую со знакомъ + тогда, когда сила направлена въ положительную сторону оси* OX, *и со знакомъ -, когда сила направлена въ отрицательную сторону оси* OX .

требуется найти координату x точки, какъ функцію времени.

Первый случай. Данная сила имѣетъ *постоянную величину:*

$$X = \mathcal{P}(\text{пост}).$$

Важнѣйшій изъ случаевъ этого рода представляетъ *сила тяжести:* $X = mg$, если положительная ось OX направлена по вертикали внизъ, и $X = -mg$, если эта ось направлена по вертикали вверхъ.

Второй принципъ кинетики даетъ намъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mathcal{P}}{m},$$

или

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{m},$$

откуда

$$dx' = \frac{\mathcal{P}}{m}dt = d\left(\frac{\mathcal{P}}{m}t\right);$$

и

$$x' = \frac{\mathcal{P}}{m}\cdot t + C \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

гдѣ C постоянная произвольная. Значеніе C будетъ опредѣленнымъ, когда, кромѣ силы, намъ задается скорость точки въ какой-либо моментъ: если дано, что въ моментъ $t = t_0$, скорость

$$x' = x'_0 = \alpha,$$

то въ силу уравненія (1):

$$\alpha = \frac{\mathcal{P}}{m}\cdot t_0 + C,$$

откуда

$$C = \alpha - \frac{\mathcal{P}}{m}\cdot t_0.$$

Моментъ t_0 называется *начальнымъ моментомъ,* а x'_0 называется *начальною скоростью* точки.

Очень часто полагаютъ, что начальный моментъ $t_0 = 0$; тог-

да въ нашемъ случаѣ:

$$C = \alpha'.$$

Уравненіе (1) представляетъ *первый интегралъ задачи*: онъ выражаетъ скорость точки черезъ время и даетъ намъ возможность опредѣлить, когда скорость точки будетъ равна нулю, и, слѣдовательно, когда можетъ измѣниться направленіе движенія.

На основаніи уравненія (1):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{m} \cdot t + C.$$

(C здѣсь уже величина извѣстная)

$$dx = \left(\frac{\mathcal{P}}{m} \cdot t + C\right) \cdot dt;$$

откуда

$$x = \frac{\mathcal{P}}{2m} \cdot t^2 + Ct + \mathcal{D} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ $\mathcal{D}$ *- вторая произвольная постоянная;* значеніе $\mathcal{D}$ будетъ опредѣленнымъ, когда для начальнаго момента $t = t_0$ задано соотвѣтственное положеніе точки: $x_0 = a$; это положеніе называется *начальнымъ положеніемъ* точки.

На основаніи уравненія (2):

$$a = \frac{\mathcal{P}}{m} \cdot t_0^2 + Ct_0 + \mathcal{D};$$

откуда

$$\mathcal{D} = a - \frac{\mathcal{P}}{2m} t_0^2 - Ct_0.$$

Когда $t_0 = 0$, постоянная $\mathcal{D} = a$.

Уравненіе (2) называется *вторымъ интеграломъ* задачи.

Въ упомянутомъ выше случаѣ *силы тяжести*, когда $X = mg$, при $t_0 = 0$ первый и второй интегралы будутъ:

$$x' = gt + \alpha,$$
$$x = \frac{gt^2}{2} + \alpha t + a.$$

Примѣчаніе. Если сила постоянная по величинѣ, но измѣняетъ свое направленіе во время движенія, тогда мы разбиваемъ движеніе на такія части, чтобы въ каждой части сила сохраняла постоянное направленіе, и опредѣляемъ указаннымъ способомъ движеніе точки въ каждой части отдѣльно.

Второй случай. Сила задана, какъ *функція времени* t:

$$X = f(t).$$

Важный случай такой силы представляетъ сила, измѣняющаяся періодически съ теченіемъ времени, напримѣръ,

$$X = h \cdot \cos pt.$$

Имѣемъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} \cdot f(t).$$

откуда найдемъ первый интегралъ задачи:

$$x' = \frac{1}{m} \cdot \int f(t) dt + C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Постоянную произвольную C мы опредѣлимъ, зная начальную скорость точки, $x'_0 = \alpha$. Для краткости обозначимъ:

$$\int f(t) \cdot dt = F(t);$$

тогда

$$\alpha = \frac{1}{m} \cdot F(t_0) + C;$$

откуда

$$C = \alpha - \frac{1}{m} \cdot F(t_0).$$

Уравненіе (3) даетъ намъ возможность рѣшать различные вопросы относительно скорости точки.

Изъ уравненія (3) имѣемъ:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \cdot F(t) + C;$$

(значеніе C считаемъ уже опредѣленнымъ).

Находимъ второй интегралъ задачи.

$$x = \frac{1}{m} \cdot \int \mathcal{F}(t).dt + Ct + \mathcal{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Вторую постоянную произвольную мы опредѣлимъ, зная начальное положеніе точки, $x_0 = a$

Обозначимъ:

$$\int \mathcal{F}(t).dt = \varphi(t);$$

получимъ на основаніи уравненія (4):

$$a = \frac{1}{m} \cdot \varphi(t_0) + Ct_0 + \mathcal{D};$$

откуда

$$\mathcal{D} = a - \frac{1}{m} \cdot \varphi(t_0) - Ct_0.$$

Въ вышеуказанномъ частномъ случаѣ, когда

$$X = h \cdot \cos pt,$$

имѣемъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{h}{m} \cdot \cos pt,$$

$$x' = \frac{h}{mp} \cdot \sin pt + C,$$

$$x = -\frac{h}{mp^2} \cos pt + Ct + \mathcal{D}.$$

Третій случай. Сила, приложенная къ точкѣ, дана, какъ *функція разстоянія движущейся точки отъ начала координатъ:*

$$X = f(x).$$

Важнѣйшій случай такой силы представляетъ сила притяженія къ неподвижному центру, а также сила отталкиванія отъ неподвижнаго центра; такъ, напримѣръ: сила притяженія по закону

Ньютона равна $\left(\frac{k^2 m}{x^2}\right)$, если m масса притягиваемой точки и начало координатъ помѣщено въ притягивающемъ центрѣ, k^2 - постоянная величина; сила заставляющая колебаться частицу упругаго тѣла, есть сила притяженія, равная $(k^2 m\cdot x)$, если начало координатъ помѣщено въ среднемъ положеніи частицы, и т.д.

Имѣемъ:

$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=f(x).$$

или

$$m\cdot\frac{dx'}{dt}=f(x).$$

Помножимъ правую часть этого уравненія на dx, а лѣвую на равное ему произведеніе $x'\cdot dt$; тогда получимъ:

$$mx'\frac{dx'}{dt}dt=f(x)\cdot dx;$$

или

$$m\cdot x'\cdot dx=f(x)\cdot dx;$$

откуда

$$d\cdot\frac{mx'^2}{2}=f(x)\cdot dx,$$

и первый интегралъ задачи будетъ:

$$\frac{mx'^2}{2}=\int f(x)\cdot dx+C\,.\dots\dots\dots\dots\dots(5).$$

Положимъ:

$$\int f(x)dx=\mathcal{F}(x).$$

тогда первый интегралъ задачи представится въ видѣ:

$$\frac{m\cdot x'^2}{2}=\mathcal{F}(x)+C\,.\dots\dots\dots\dots\dots(5_1)$$

Постоянную произвольную C опредѣлимъ съ помощью начальнаго положенія $x_0=a$ и начальной скорости $x_0'=\alpha$.

Изъ уравненія (5_1) слѣдуетъ:

$$\frac{m\alpha^2}{2} = \mathcal{F}(a) + C;$$

откуда

$$C = \frac{m\alpha^2}{2} - \mathcal{F}(a).$$

Уравненіе (5_1) даетъ намъ возможность рѣшать различные вопросы относительно скорости точки; изъ этого уравненія получаемъ:

$$x' = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[\mathcal{F}(x) + C\right]}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5_2)$$

Знакъ передъ радикаломъ опредѣляется направленіемъ начальной скорости, именно, долженъ быть взятъ тотъ знакъ, который имѣетъ

$$x_0' = \alpha \; (+, \text{если } \alpha > 0 \quad ; \quad -, \text{если } \alpha < 0),$$

потому что, какая бы сила на точку ни дѣйствовала, точка всегда въ первое время послѣ начала движенія будетъ двигаться въ сторону начальной скорости; если же начальная скорость точки равна нулю ($\alpha = 0$), то знакъ передъ радикаломъ опредѣляется направленіемъ силы въ начальный моментъ, потому что, если начальная скорость равна нулю, то точка будетъ двигаться по направленію силы, слѣдовательно, надо взять $+$, когда сила въ начальный моментъ направлена въ положительную сторону оси Ox $[f(x_0) > 0]$, и $-$, когда сила направлена въ отрицательную сторону $[f(x_0) < 0]$; если же и $f(x_0) = 0$, то точка останется въ покоѣ.

Изъ уравненія (5_2):

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[\mathcal{F}(x) + C\right]},$$

откуда

---

*) *Въ общемъ изслѣдованіи мы будемъ писать передъ радикаломъ два знака: въ каждомъ частномъ случаѣ удерживаютъ одинъ, руководствуясь при выборѣ указанными соображеніями.*

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\cdot[\mathfrak{F}(x)+C]}} = dt.$$

Второй интегралъ задачи будетъ:

$$\int \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[\mathfrak{F}(x)+C]}} = t+\mathfrak{D}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

гдѣ $\mathfrak{D}$ постоянная произвольная.

Положимъ:

$$\int \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[\mathfrak{F}(x)+C]}} = \varphi(x),$$

тогда второй интегралъ представится въ такомъ видѣ:

$$\varphi(x) = t+\mathfrak{D}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6_1)$$

гдѣ

$$\mathfrak{D} = \varphi(a) - t_0. \text{*)}$$

Какъ *примѣръ*, разсмотримъ прямолинейное движеніе точки, на которую дѣйствуетъ *сила притяженія къ неподвижному центру, пропорціональная разстоянію.*

Дано:

$$X = -k^2 m x,\ t_0 = 0,\ x_0 = a,\ x'_0 = \alpha.$$

k^2 есть величина силы притяженія на единицу массы, находящейся на разстояніи равномъ единицѣ отъ притягивающаго центра.

Уравненіе движенія по сокращеніи на m будетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x;$$

---

*) *Пріемъ, которымъ мы воспользовались для интегрированія уравненія движенія въ III случаѣ, можно примѣнять всякій разъ, когда имѣемъ дифференціальное уравненіе вида:*

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \Phi(u),$$

какія бы перемѣнныя величины не обозначались буквами u *и* t.

откуда:

$$d\frac{x'^2}{2} = -k^2 x\,dx.$$

Первый интегралъ:

$$\frac{x'^2}{2} = -k^2\frac{x^2}{2} + C. \qquad \text{(5)}$$

Подставляя въ это уравненіе значеніе постоянной произвольной

$$C = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{k^2 \cdot a^2}{2},$$

получимъ:

$$x'^2 = -k^2 x^2 + k^2 a^2 + \alpha^2,$$

или

$$x'^2 = k^2\left(a^2 + \frac{\alpha^2}{k^2} - x^2\right).$$

Для сокращенія письма положимъ:

$$a^2 + \frac{\alpha^2}{k^2} = q^2,$$

тогда

$$x'^2 = k^2 \cdot (q^2 - x^2),$$

и

$$x' = \pm k \cdot \sqrt{q^2 - x^2} \; . \qquad (5'_2)$$

Начальное значеніе $x_0 = a$ мы можемъ всегда считать положительнымъ, потому что выборъ направленія оси OX зависитъ отъ насъ, но начальная скорость α можетъ быть положительною, отрицательною и равною нулю.

Въ уравненіи $(5'_2)$ передъ радикаломъ возьмемъ знакъ плюсъ (+), когда $\alpha > 0$, и минусъ (-), когда $\alpha < 0$; когда же $\alpha = 0$, то надо взять -, потому что точка будетъ двигаться къ притягивающему центру.

Скорость точки - величина вещественная, слѣдовательно, разность q^2-x^2 не можетъ быть отрицательной, т.е. необходимо, чтобы во все время движенія было

$$x^2 \leq q^2 \quad \text{или} \quad |x| \leq q.$$

Отсюда заключаемъ, что точка при своемъ движеніи не можетъ удаляться отъ начала координатъ на разстояніе, большее q.



Чертежъ 39 .

Въ положеніяхъ, гдѣ $|x|=q$, точка имѣетъ скорость, равную нулю, и измѣняетъ направленіе движенія. Наибольшую скорость точка имѣетъ тогда, когда $x=0$, т.е. въ среднемъ положеніи.

Изъ уравненія ($5'_2$) можно найти скорость точки для всякаго x.

1. Когда $\alpha>0$, въ уравненіи ($5'_2$) радикалъ надо взять со знакомъ + :

$$x' = k\sqrt{q^2-x^2};$$

откуда:

$$\frac{dx}{\sqrt{q^2-x^2}} = k\,dt.$$

Второй интегралъ задачи будетъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{q^2-x^2}} = kt+D \quad \ldots \quad (6')$$

или

$$\arcsin\frac{x}{q} = kt+D \quad \ldots \quad (6'_1)$$

гдѣ

$$\mathcal{D} = \arcsin\frac{a}{q},$$

если положить $t_0 = 0$; дуга берется въ первой четверти. Изъ уравненія ($6_1'$)

$$\frac{x}{q} = \sin(kt+\mathcal{D});$$

откуда

$$x = q\sin(kt+\mathcal{D}),$$

или

$$x = q\cdot\sin\left(kt+\arcsin\frac{a}{q}\right) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6'')$$

Движеніе, опредѣляемое этимъ уравненіемъ есть *гармоническое колебаніе.*

Изъ формулы (6") слѣдуетъ, что при измѣненіи t на $\frac{2\pi}{k}$ или, вообще, на $\frac{2n\pi}{k}$, x получитъ прежнее значеніе; слѣдовательно, если въ какой-либо моментъ точка находится въ положеніи M_1, то при измѣненіи t на $T=\frac{2\pi}{k}$, она пройдетъ до положенія M_2 и обратно въ M_1; при измѣненіи же t на $\frac{1}{2}T=\frac{\pi}{k}$ точка перейдетъ отъ одного крайняго положенія до другого.

$T=\frac{2\pi}{k}$ - называется *продолжительностью полнаго колебанія* или *его періодомъ.*

$\mathcal{T}=\frac{\pi}{k}$ - называется *продолжительностью одного размаха,*

q - называется *амплитудой колебанія.*

T, какъ видимъ, зависитъ только отъ величины притяженія единицы массы на единицѣ разстоянія.

Амплитуда

$$q = \sqrt{a^2+\frac{\alpha^2}{k^2}}$$

зависитъ, кромѣ того, отъ начальнаго положенія и отъ начальной скорости.

Уравненіе (6") можно преобразовать

$$x = q\cdot\sin kt\cdot\cos\mathcal{D} + q\cos kt\cdot\sin\mathcal{D}.$$

Мы нашли выше, что

$$\sin D = \frac{a}{q},$$

слѣдовательно:

$$\cos D = \sqrt{\frac{q^2-a^2}{q^2}}, \qquad *)$$

и

$$x = \sqrt{q^2-a^2} \cdot \sin kt + a \cdot \cos kt$$

или

$$x = a \cdot \cos kt + \frac{a}{k} \cdot \sin kt.$$

2. Если $\alpha < 0$, то

$$x' = -k \cdot \sqrt{q^2-x^2}$$

и

$$\frac{dx}{\sqrt{q^2-x^2}} = -k \cdot dt;$$

откуда

$$\arcsin \frac{x}{q} = -kt + D,$$

гдѣ

$$D = \operatorname{arc} \cdot \sin \frac{a}{q};$$

слѣдовательно:

$$x = q \cdot \sin(-kt + D).$$

Мы получимъ прежнюю формулу (6"), когда возьмемъ дугу, равную постоянной D, во второй четверти, тогда

$$x = q \cdot \sin\left(-kt + \pi - \arcsin \frac{a}{q}\right);$$

гдѣ дуга $\arcsin \frac{a}{q}$ берется уже въ первой четверти:

$$x = q \cdot \sin\left[\pi - \left(kt + \arcsin \frac{a}{q}\right)\right],$$

---

*) *Радикалъ беремъ со знакомъ плюсъ.*

откуда

$$x = q\cdot \sin\left(kt + \arcsin\frac{a}{q}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6'')$$

изъ этой формулы получаемъ, какъ и раньше,

$$x = a\cos kt + \frac{a}{k}\cdot \sin kt.$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что въ разсматриваемой задачѣ знакъ + или − передъ радикаломъ въ первомъ интегралѣ не оказываетъ вліянія на видъ второго интеграла.

Когда $\alpha = 0$, тогда $q = a, \frac{a}{q} = 1$, и $\arcsin\frac{a}{q} = \frac{\pi}{2}$, по формулѣ (6") имѣемъ:

$$x = a\cdot \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right),$$

или

$$x = a\cdot \cos kt.$$

Въ случаѣ, когда на точку дѣйствуетъ *сила отталкиванія отъ неподвижнаго центра, пропорціональная разстоянію,* дифференціальное уравненіе движенія точки будетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = +k^2 x. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Для интегрированія этого уравненія такъ же, какъ и уравненія предыдущаго примѣра, кромѣ вышеуказаннаго метода, можно примѣнить методъ *частныхъ рѣшеній*, такъ какъ уравненія линейныя. Уравненію (7), очевидно, удовлетворяютъ:

$$x = e^{kt} \quad и \quad x = e^{-kt},$$

гдѣ e основаніе натуральныхъ логарифмовъ; поэтому общее выраженіе x будетъ:

$$x = C\cdot e^{kt} + D\cdot e^{-kt}.$$

При начальныхъ данныхъ:

$$t_0 = 0 \quad , \quad x_0 = a \quad , \quad x'_0 = \alpha,$$

получимъ:

$$x = \frac{a}{2}\cdot\left(e^{kt}+e^{-kt}\right)+\frac{\alpha}{2k}\left(e^{kt}-e^{-kt}\right).$$

Отсюда мы видимъ, что по истеченіи достаточно большого промежутка времени точка будетъ находиться сколь угодно далеко отъ отталкивающаго центра.

Четвертый случай. Сила, приложенная къ точкѣ, дана какъ *функція скорости точки:*

$$X = f(x').$$

Силы, зависящія отъ скорости, встрѣчаются тогда, когда изслѣдуется движеніе матеріальной точки въ *сопротивляющейся средѣ.*

Сопротивленіе среды разсматривается, какъ сила, приложенная къ матеріальной точкѣ и направленная противоположно скорости точки; величина этой силы выражается нѣкоторой функціей отъ плотности среды и отъ скорости точки.

Когда плотность среды постоянна, то сопротивленіе измѣняется въ зависимости только отъ скорости точки, - въ простѣйшихъ случаяхъ оно пропорціонально первой, второй, вообще, цѣлой степени скорости.

На основаніи второго принципа имѣемъ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x').$$

Существуютъ два пути для полученія интеграловъ этого уравненія:

I. Такъ какъ

$$m\frac{dx'}{dt} = f(x'),$$

то

$$m\frac{dx'}{f(x')} = dt.$$

Первый интегралъ задачи будетъ:

$$m\int\frac{dx'}{f(x')}=t+C. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7').$$

Положимъ:

$$\int\frac{dx'}{f(x')}=\varphi(x'),$$

Тогда

$$\varphi(x')=\frac{1}{m}\cdot(t+C). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7'_1).$$

Относя уравненіе ($7'_1$) къ начальному моменту, получаемъ:

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{m}(t_0+C),$$

откуда

$$C=m\cdot\varphi(\alpha)-t_0.$$

Рѣшая уравненіе ($7'_1$) относительно x', получимъ x' какъ извѣстную функцію отъ t; пусть

$$x'=\mathcal{F}(t). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7'_2).$$

Это уравненіе позволяетъ намъ рѣшать различные вопросы относительно скорости точки.

Изъ уравненія ($7'_2$) слѣдуетъ:

$$dx=\mathcal{F}(t)\,dt.$$

Отсюда находимъ второй интегралъ задачи:

$$x=\int\mathcal{F}(t)\,dt+\mathcal{D}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

полагая

$$\int\mathcal{F}(t)\,dt=\Phi(t),$$

имѣемъ:

$$x=\Phi(t)+\mathcal{D}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8_1)$$

гдѣ

$$\mathcal{D}=a-\Phi(t_0).$$

II. Имѣемъ уравненіе:

$$m\cdot\frac{dx'}{dt}=f(x').$$

Правую часть его помножимъ на dx, лѣвую - на равное произведеніе $x'dt$, какъ въ предыдущемъ случаѣ III:

$$m\cdot x'\cdot dx'=f(x')dx,$$

откуда

$$\frac{m\cdot x'dx'}{f(x')}=dx.$$

Первый интегралъ задачи будетъ:

$$m\cdot\int\frac{x'dx'}{f(x')}=x+C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Онъ выражаетъ зависимость между скоростью и разстояніемъ.

Положимъ:

$$m\cdot\int\frac{x'\cdot dx'}{f(x')}=\Phi(x').$$

Тогда

$$m\Phi(x')=x+C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9_1')$$

Рѣшая это уравненіе относительно x', выразимъ x' какъ извѣстную функцію отъ x; пусть будетъ:

$$x=\pi(x);$$

тогда

$$\frac{dx}{dt}=\pi(x);$$

откуда

$$\frac{dx}{\pi(x)}=dt;$$

слѣдовательно, второй интегралъ задачи будетъ:

$$\int\frac{dx}{\pi(x)}=t+\mathcal{D}_1; \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

полагая

$$\int \frac{dx}{\pi(x)} = \psi(x),$$

имѣемъ

$$\psi(x) = t_0 + \mathcal{D}_1,$$

$$\mathcal{D}_1 = \psi(a) - t_0 .$$

При рѣшенiи задачъ въ случаѣ IV можно примѣнить оба изложенные способа, выбирая, конечно, тотъ, который даетъ болѣе простое рѣшенiе.

Можетъ, однако, случиться, что ни одного изъ уравненiй ($7_1'$) и ($9_1'$) мы не сумѣемъ рѣшить относительно x' ; тогда *совокупность* этихъ двухъ уравненiй можно разсматривать, какъ полное рѣшенiе задачи.

Къ случаю IV относятся задачи о движенiи тяжелой точки въ *сопротивляющейся средѣ.*

Если сопротивленiе среды пропорцiонально *первой* степени скорости, то при восходящемъ и нисходящемъ движенiи *тяжелой* точки, когда вертикальная ось OX направлена внизъ, мы будемъ имѣть:

$$X = mg - n\cdot mx';$$

если сопротивленiе среды пропорцiонально *квадрату* скорости, то при паденiи точки:

$$X = mg - n\,mx'^2,$$

а при восходящемъ движенiи точки:

$$X = mg + n\cdot m\cdot x'^2;$$

вообще, если сопротивленiе среды пропорцiонально степени p скорости, гдѣ p число цѣлое, то въ дифференцiальномъ уравненiи движенiя соотвѣтствующiй членъ будетъ:

при p нечетномъ .... $-n\cdot m\cdot x'^p$;

а при p четномъ ...... $-n\cdot m\cdot x'^p$, если $x' > 0$

и при p четномъ ....$+ n m x'^{p}$, если $x' < 0$,

такъ какъ сила сопротивленія всегда имѣетъ направленіе, противоположное скорости точки.

Какъ *примѣръ*, разсмотримъ движеніе тяжелой матеріальной точки въ однородной средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально первой степени скорости.

Вертикальную ось OX направимъ внизъ.

Дано:

$$X = mg - nmx',\ t_0 = 0,\ x_0 = a,\ x'_0 = \alpha;$$

$\alpha > 0$ или $\alpha < 0$, смотря по тому, какъ направлена начальная скорость, вверхъ или внизъ.

Дифференціальное уравненіе движенія, по сокращеніи на m, будетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - nx';$$

откуда

$$\frac{dx'}{g - nx'} = dt.$$

Интегрируя, получимъ:

$$-\frac{1}{n} \log(g - nx') = t + C.$$

Подставляя въ это уравненіе значеніе постоянной произвольной

$$C = -\frac{1}{n} \log(g - n\alpha),$$

имѣемъ:

$$t = \frac{1}{n} \cdot \log\left(\frac{g - n\alpha}{g - nx'}\right),$$

откуда

$$\log\left(\frac{g - n\alpha}{g - nx'}\right) = nt,$$

или

$$\frac{g - n\alpha}{g - nx'} = e^{nt};$$

слѣдовательно:

$$g - n\alpha = e^{nt}(g - nx');$$

откуда находимъ первый интегралъ задачи:

$$x' = \frac{g}{n} - \left(\frac{g}{n} - \alpha\right) \cdot e^{-nt}.$$

Интегрируя еще разъ, получимъ второй интегралъ:

$$x = \frac{g}{n} t + \frac{g - n\alpha}{n^2} \cdot e^{-nt} + D,$$

гдѣ

$$D = \alpha - \frac{g - n\alpha}{n^2};$$

и слѣдовательно:

$$x = \alpha + \frac{g}{n} \cdot t - \frac{g - n\alpha}{n^2}\left(1 - e^{-nt}\right).$$

------ " ------

Легко доказать, что тяжелая точка, брошенная вверхъ въ сопротивляющейся средѣ, *каковъ бы ни былъ законъ сопротивленія*, поднимается въ теченіе *болѣе короткаго* промежутка времени и достигаетъ *меньшей* высоты, чѣмъ въ пустотѣ, при одной и той же начальной скорости α.

Если вертикальная ось OX направлена вверхъ, то уравненіе движенія точки въ сопротивляющейся средѣ, по сокращеніи на m будетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g - R,$$

гдѣ R есть нѣкоторая функція скорости, имѣющая положительное значеніе. Интегрируя, получимъ:

$$\int \frac{dx'}{g - R} = t + C$$

Положимъ для краткости:

$$\int \frac{dx'}{g+R} = F(x')$$

тогда:

$$-F(x') = t + C;$$

относя это уравненіе къ начальному моменту, когда $x_0 = 0, x'_0 = \alpha$, $t = 0$, находимъ:

$$-F(\alpha) = C;$$

слѣдовательно:

$$t = F(\alpha) - F(x')$$

Обозначимъ черезъ t_1 промежутокъ времени отъ начальнаго момента до момента высшаго поднятія точки, когда $x'_1 = 0$; тогда:

$$t_1 = F(\alpha) - F(0),$$

или

$$t_1 = \int_0^\alpha \frac{dx'}{g+R}, \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (11).$$

Время T поднятія точки вверхъ, когда сопротивленіе среды $R = 0$, равно

$$T = \int_0^\alpha \frac{dx'}{g} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (12).$$

Каждый элементъ интеграла (11) меньше соотвѣтственнаго элемента интеграла (12), а такъ какъ суммированіе элементовъ происходитъ между одинаковыми предѣлами, то

$$\int_0^\alpha \frac{dx'}{g+R} < \int_0^\alpha \frac{dx}{g},$$

слѣдовательно:

$$t_1 < T.$$

Для доказательства второго предложенія, беремъ интегралъ, выражающій зависимость между x' и x :

$$\int \frac{x' \cdot dx'}{-g-R} = x + C_1 .$$

Обозначимъ:

$$\int \frac{x' \cdot dx'}{g+R} = \Phi(x');$$

тогда, подставляя значенiе постоянной произвольной

$$C_1 = -\Phi(\alpha),$$

получимъ:

$$x = \Phi(\alpha) - \Phi(x').$$

Пусть h обозначаетъ высоту подъема точки; ясно, что x равно h, когда $x'=0$; слѣдовательно:

$$h = \Phi(\alpha) - \Phi(0),$$

или

$$h = \int_0^\alpha \frac{x' dx'}{g+R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Высота H поднятiя точки въ средѣ, сопротивленiе которой $R=0$, т.е. въ пустотѣ, равна:

$$H = \int_0^\alpha \frac{x' dx'}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Элементы интеграла (13) меньше соотвѣтственныхъ элементовъ интеграла (14), а такъ какъ оба интеграла берутся между одними и тѣми же предѣлами, то интегралъ (13) меньше интеграла (14), слѣдовательно

$$h < H.$$

------ " ------

Для тѣхъ случаевъ прямолинейнаго движенiя, когда данная сила зависитъ отъ *двухъ* или отъ *трехъ* перемѣнныхъ величинъ:

$$X = f(t,x),\ X = f(t,x'),\ X = f(x,x'),\ X = f(t,x,x'),$$

нельзя указать *общихъ* способовъ рѣшенія, которые всегда давали бы интегралы: въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ приходится употреблять тотъ или другой пріемъ интегрированія въ зависимости отъ вида функціи f.

1. Какъ *примѣръ* на тотъ случай, когда сила есть функція отъ разстоянія и скорости, разсмотримъ движеніе точки, *притягиваемой* къ неподвижному центру силою, *пропорціональною разстоянію*, принимая во вниманіе *сопротивленіе среды, пропорціональное скорости*.

Дифференціальное уравненіе движенія, по сокращеніи на m будетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 \cdot x - 2 \cdot n \cdot x', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

если постоянный коэффиціентъ сопротивленія среды обозначимъ черезъ

$$2 \cdot m \cdot n$$

Введемъ въ уравненіе (15) вмѣсто *перемѣнной* x *новую перемѣнную* ξ такъ, чтобы для ξ уравненіе (15) получило видъ, нами уже изученный; положимъ:

$$x = \xi \cdot e^{rt};$$

тогда

$$x' = e^{rt} \cdot (\xi' + \gamma\xi)$$

и

$$x'' = e^{rt} \cdot (\xi'' + 2\gamma\xi' + \gamma^2 \cdot \xi).$$

Замѣняя въ уравненіи (15) x, x' и x'', полученными для нихъ выраженіями, находимъ, по раздѣленіи на e^{rt}:

$$\xi'' + 2\gamma\xi' + \gamma^2\xi = -k^2\xi - 2n\xi' - 2n\gamma\xi \quad \ldots\ldots (16)$$

Положимъ:

$$\gamma = -n;$$

тогда уравненіе (16) приметъ извѣстный уже видъ:

$$\xi'' = -(k^2 - n^2)\xi \text{ ....(17).}$$

При этомъ могутъ представиться три случая: 1) $k^2 > n^2$, 2) $k^2 = n^2$, 3) $k^2 < n^2$.

Разберемъ подробнѣе *первый случай*, какъ болѣе важный, ибо во многихъ случаяхъ движенія сопротивленіе мало.

Обозначимъ:

$$k^2 - n^2 = p^2.$$

Тогда уравненіе (17) приметъ видъ:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -p^2\xi;$$

отсюда, какъ извѣстно, получаемъ:

$$\xi = q \cdot \sin(p \cdot t + \delta),$$

гдѣ

$$\delta = \arcsin\frac{\xi_0}{q}$$

и

$$q = \sqrt{\xi_0^2 + \frac{\xi_0'^2}{p^2}};$$

причемъ

$$\xi_0 = x_0, \quad \xi_0' = x_0' + nx_0, \quad \text{если } t_0 = 0.$$

Такимъ образомъ, для разсматриваемаго движенія мы находимъ:

$$x = q \cdot e^{-nt} \cdot \sin(pt + \delta) \text{ .... (18).}$$

Уравненіе (18) выражаетъ *"затухающее" колебательное движеніе*.

Покажемъ, что въ этомъ движеніи *продолжительность одного размаха остается постоянной:* $T = \frac{\pi}{p}$, *величины же размаховъ уменьшаются* съ теченіемъ времени *въ геометрической прогрессіи*,

знаменатель которой: e^{-nt}.

Дифференцируемъ уравненіе (18):

$$x' = e^{-nt}\left[q\cdot p\cos(pt+\delta) - n\cdot q\sin(pt+\delta)\right];$$

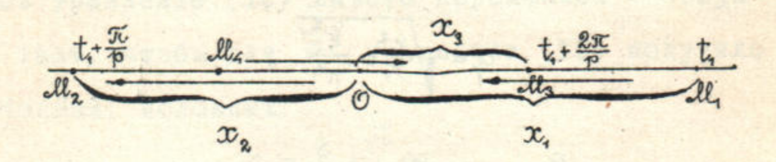
отсюда получаемъ уравненіе для опредѣленія тѣхъ моментовъ времени, въ которые скорость точки x' равна нулю:

$$tg(pt+\delta) = \frac{p}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Ясно, что уравненію (19) удовлетворяетъ цѣлый рядъ значеній t : t_1 , $t_1+\frac{\pi}{p}$, $t_1+\frac{2\pi}{p}$ и т.д. слѣдовательно, продолжительность одного размаха $\mathfrak{T}$ равна постоянной величинѣ $\frac{\pi}{p}$; продолжительность полнаго колебанія будетъ:

$$T = \frac{2\pi}{p}$$

Чтобы доказать второе положеніе, опредѣлимъ величины перваго размаха точки M_1M_2 (черт.39) и второго M_2M_3.



Чертежъ 39.

Очевидно:

$$M_1M_2 = x_1 + |x_2|\,;\ M_2M_3 = |x_2| + x_3.$$

Въ моментъ t_1

$$x_1 = q\cdot e^{-nt_1}\sin(pt_1+\delta);$$

въ моментъ $\left(t_1+\frac{\pi}{p}\right)$

$$x_2 = -q e^{-nt_1}\cdot e^{-\frac{n\pi}{p}}\sin(pt_1+\delta) = -x_1 e^{-\frac{n\pi}{p}};$$

слѣдовательно

$$M_1M_2 = x_1\left(1+e^{-\frac{n\pi}{p}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Далѣе, для момента $\left(t_1 + \frac{2\pi}{p}\right)$

$$x_3 = q \cdot e^{-nt_1} e^{-\frac{2\pi n}{p}} \sin(pt_1 + \delta) = x \cdot e^{-\frac{2n\pi}{p}};$$

поэтому

$$\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 = x_1 \cdot e^{-\frac{n\pi}{p}}\left(1 + e^{-\frac{n\pi}{p}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Сравнивая уравненія (20) и (21) видимъ, что $\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3$ отличается отъ $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$ множителемъ $e^{-\frac{n\pi}{p}}$ или, такъ какъ $\frac{\pi}{p} = \mathcal{T}$, множителемъ $e^{-n\mathcal{T}}$, причемъ $e^{-n\mathcal{T}} < 1$.

Далѣе, получимъ:

$$x_4 = -x_3 \cdot e^{-n\mathcal{T}},$$

слѣдовательно

$$\mathcal{M}_3\mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 e^{-n\mathcal{T}},$$

$$x_5 = -x_4 \cdot e^{-n\mathcal{T}} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ и т.д.}$$

Такимъ образомъ величины размаховъ при затухающемъ колебательномъ движеніи убываютъ въ геометрической прогрессіи, знаменатель которой есть $e^{-n\mathcal{T}}$; если величину размаха перваго послѣ начальнаго момента колебанія обозначимъ черезъ A , то величины размаховъ слѣдующихъ колебаній будутъ

$$A \cdot e^{-n\mathcal{T}}, A \cdot e^{-2n\mathcal{T}}, A \cdot e^{-3n\mathcal{T}}, A e^{-4n\mathcal{T}}, \ldots\ldots \text{ и т.д.}$$

Второй случай:

$$k = n$$

Уравненіе (17) даетъ:

$$\xi'' = 0$$

отсюда

$$\xi = \xi_0 + \xi'_0 t$$

а потому

$$x = e^{-nt}\cdot(\xi_0 + \xi_0' t).$$

Это выраженіе показываетъ, что по истеченіи достаточно большого промежутка времени точка будетъ сколь угодно близка къ притягивающему центру; при $t = \infty$, $x = 0$.

Если начальная скорость точки равна нулю: $x_0' = 0$, мы получимъ:

$$x = x_0 \cdot e^{-nt}\cdot(1 + nt);$$

тогда

$$x' = -n^2 \cdot x_0 e^{-nt};$$

слѣдовательно, скорость не мѣняетъ своего направленія и точка все время приближается къ притягивающему центру.

Третій случай:

$$k < n.$$

Пусть

$$n^2 - k^2 = r^2.$$

Уравненіе (17) даетъ:

$$\xi'' = r^2 \cdot \xi.$$

Интегрируя, находимъ:

$$\xi = A \cdot e^{rt} + B \cdot e^{-rt},$$

гдѣ A и B постоянныя произвольныя, опредѣляемыя по начальному положенію и начальной скорости точки.

Далѣе получимъ:

$$x = A \cdot e^{(r-n)t} + B \cdot e^{-(r+n)t}.$$

Такъ какъ $r - n < 0$, то оба члена этого выраженія съ теченіемъ времени уменьшаются и, слѣдовательно, по истеченіи достаточно большого промежутка времени точка будетъ находиться сколь угодно близко къ притягивающему центру; при $t = \infty$, $x = 0$.

Два послѣднихъ случая имѣютъ мѣсто при большомъ сопротив-

леніи, напримѣръ, когда движется намагниченная стрѣлка при сильныхъ магнитныхъ успокоителяхъ.

2. *Примѣромъ* на тотъ случай, когда сила есть функція *отъ времени и разстоянія,* можетъ служить задача о прямолинейномъ движеніи точки, на которую дѣйствуетъ сила притяженія къ неподвижному центру, пропорціональная разстоянію, и, кромѣ того, переіодическая сила ("возмущающая сила").

Уравненіе движенія по сокращеніи на массу точки будетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 \cdot x + h \cdot \sin pt \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

гдѣ h наибольшая величина возмущающей силы при массѣ точки равной единицѣ; періодъ этой силы равенъ $\frac{2\pi}{p}$.

Разсмотримъ случай, когда p не равно k.

Положимъ:

$$x = \xi + \delta \cdot \sin pt,$$

гдѣ δ постоянный множитель, который подберемъ такъ, чтобы члены, содержащіе $\sin pt$, въ преобразованномъ уравненіи (22) исчезли; - получимъ:

$$\delta = \frac{h}{k^2 - p^2};$$

тогда уравненіе (22) приметъ знакомый намъ видъ:

$$\xi'' = -k^2 \cdot \xi.$$

Интегрируя, находимъ:

$$\xi = A \cdot \sin(kt + B),$$

гдѣ A и B постоянныя произвольныя, опредѣляемыя по начальнымъ даннымъ.

Далѣе получимъ:

$$x = A \cdot \sin(kt + B) + \frac{h}{k^2 + p^2} \sin pt.$$

Такимъ образомъ, въ разсматриваемомъ случаѣ точка совершаетъ колебаніе, составное изъ двухъ гармоническихъ колебаній; первое изъ нихъ называется *„собственнымъ"* или *„свободнымъ"* колебаніемъ, а второе *„вынужденнымъ"* колебаніемъ.

Замѣчательное свойство вынужденнаго колебанія состоитъ въ томъ, что при маломъ значеніи h , т.е. при малой возмущающей силѣ, амплитуда вынужденнаго колебанія будетъ имѣть большую величину, если только величины k и p мало различаются между собою, т.е. если періоды собственнаго колебанія и возмущающей силы близки другъ къ другу.

Въ этомъ и состоитъ явленіе *резонанса* - въ простѣйшей формѣ.

Въ случаѣ, когда $p = k$, получимъ:

$$x = A\sin(kt + B) - \frac{h}{2k} \cdot t \cdot \cos kt ;$$

- подставляя это выраженіе x въ ур.(22), легко убѣдиться въ томъ, что оно удовлетворяетъ этому уравненію.

3. Какъ *примѣръ* на тотъ случай, когда сила зависитъ отъ *разстоянія, скорости и времени,* мы можемъ взять предыдущую задачу, введя въ нее сопротивленіе среды, пропорціональное скорости.

Уравненіе движенія будетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x - 2nx' + h \cdot \sin pt ;$$

здѣсь $2n$ есть величина сопротивленія, которое встрѣчаетъ точка массы, равной единицѣ, движущаяся со скоростью, равной единицѣ.

Сила $mh \cdot \sin pt$, гдѣ m масса точки, есть *возмущающая сила.*

Найдемъ сначала частное рѣшеніе этого уравненія;- оно бу-

детъ, очевидно, вида:

$$x = C.\cos pt + D \sin pt,$$

гдѣ C и D постоянныя величины, которыя нужно соотвѣтственнымъ образомъ опредѣлить.

Подставивши это выраженіе x въ дифференціальное уравненіе, приравниваемъ коэффиціенты при $\cos pt$ и $\sin pt$ въ обѣихъ частяхъ; - получаемъ:

$$-C.p^2 = -C.k^2 - 2D.n.p,$$

$$-D.p^2 = -D.k^2 + 2C.n.p + h.$$

Откуда слѣдуетъ

$$C.(k^2-p^2) = -2\,D.n.p,$$

$$2C.np - D.(k^2-p^2) = h.$$

Отсюда находимъ:

$$C = \frac{2n.p.h}{(k^2-p^2)^2 + 4n^2.p^2},$$

$$D = \frac{(k^2-p^2).h}{(k^2-p^2)^2 + 4n^2.p^2}.$$

Введемъ величину δ, полагая

$$\sin\delta = \frac{2n.p}{\sqrt{(k^2-p^2)^2 + 4n^2.p^2}}, \quad \cos\delta = \frac{-(k^2-p^2)}{\sqrt{(k^2-p^2)^2 + 4n^2.p^2}},$$

тогда искомое частное рѣшеніе представится въ видѣ:

$$x = \frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2 + 4n^2p^2}} \cdot \sin(pt+\delta).$$

Такъ какъ дифференціальное уравненіе задачи линейное съ послѣднимъ членомъ, то общій интегралъ его мы получимъ, прибавляя найденное частное рѣшеніе къ извѣстному уже намъ общему интегралу соотвѣтствующаго уравненія безъ послѣдняго члена:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 \cdot x - 2n \cdot x'$$

Въ случаѣ наиболѣе важномъ, когда $k > n$, т.е. при маломъ сопротивленіи, мы получимъ такимъ образомъ слѣдующее выраженіе для x:

$$x = A \cdot e^{-nt} \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + B) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} \sin(p \cdot t + \delta),$$

гдѣ A и B постоянныя, значенія которыхъ опредѣляются положеніемъ и скоростью точки въ начальный моментъ $t_0 = 0$, а величина δ опредѣляется уравненіемъ:

$$tg\,\delta = \frac{2np}{p^2 - k^2}.$$

Точка совершаетъ въ этомъ случаѣ движеніе, составное изъ колебаній двухъ типовъ: *колебаній затухающихъ* и *колебаній вынужденныхъ;* въ дѣйствительности первое изъ нихъ черезъ небольшой промежутокъ времени обыкновенно становится уже незамѣтнымъ по сравненію со вторымъ.

При маломъ сопротивленіи амплитуда вынужденныхъ колебаній, равная $\frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}$, будетъ *весьма большою* даже при маломъ значеніи h, т.е. *при малой возмущающей силѣ*, тогда, когда величины k и p будутъ мало отличаться другъ отъ друга, слѣдовательно, тогда, когда періодъ возмущающей силы и періодъ гармоническихъ колебаній, соотвѣтствующихъ силѣ $-mkx^2$, будутъ близки къ равенству; - въ этомъ случаѣ мы имѣемъ явленіе *резонанса*.

—

ГЛАВА II.

КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНІЕ, ОПРЕДѢЛЕНІЕ КОТОРАГО ПРИВОДИТСЯ КЪ ОПРЕДѢЛЕНІЮ ДВУХЪ ИЛИ ТРЕХЪ ДВИЖЕНІЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХЪ.

Движеніе точки въ плоскости.

Если точка во все время движенія остается въ одной плоскости, то скорость ея въ каждый моментъ (слѣдовательно, и въ начальный моментъ) направлена въ этой плоскости; измѣненіе скорости, а потому и ускореніе точки также заключается въ плоскости движенія, слѣдовательно, и сила постоянно направлена въ этой плоскости. Такимъ образомъ, плоскостью движенія точки можетъ быть только плоскость, проведенная черезъ начальное направленіе скорости и начальное направленіе силы, и движеніе будетъ плоскимъ только тогда, если сила все время останется въ этой плоскости.

Важнѣйшіе случаи, въ которыхъ точка совершаетъ *плоское* движеніе, будутъ слѣдующіе: 1, при дѣйствіи силы тяжести; 2, при дѣйствіи центральной силы *) притяженія или отталкиванія, когда притягивающій или отталкивающій центръ неподвиженъ; и 3, когда къ силѣ тяжести или къ силѣ центральной присоединяется сопротивленіе среды.

Возьмемъ координатныя оси OX и OY. Пусть на точку

---

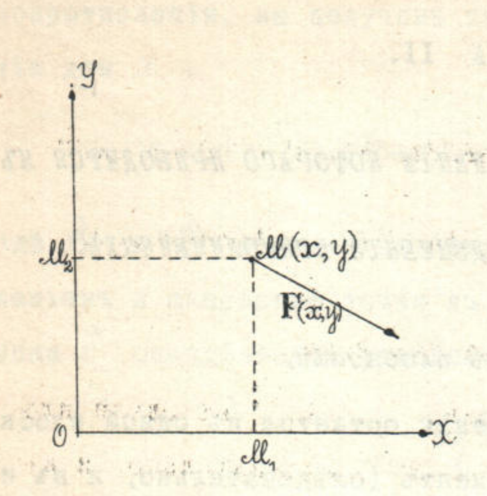
*) *Сила, приложенная къ точкѣ, называется центральною силою тогда, когда линія ея дѣйствія постоянно проходитъ черезъ одну и ту же точку, которая и называется центромъ.*

$\mathcal{M}(x,y)$ дѣйствуетъ сила $\mathbf{F}$, проекціи которой на оси OX и OY: $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$.

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=\mathbf{X},$$

$$m\cdot\frac{d^2y}{dt^2}=\mathbf{Y}.$$



Чертежъ 40.

Сила $\mathbf{F}$, вообще говоря, можетъ зависѣть отъ времени, положенія и скорости точки, поэтому въ общемъ случаѣ $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ могутъ быть выражены какъ функціи отъ перемѣнныхъ: t, x, y, x' и y'; общихъ пріемовъ интегрированія при какихъ угодно выраженіяхъ x и y указать нельзя.

Простѣйшій случай представляется тогда, когда мы можемъ опредѣлить *независимо* другъ отъ друга движенія проекцій $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ (черт.40) точки $\mathcal{M}$ на координатныя оси; для этого необходимо и достаточно, чтобы выраженіе проекціи силы $\mathbf{X}$ не содержало y и y', а выраженіе проекціи $\mathbf{Y}$ не содержало x и x'.

$$\mathbf{X}=f_1(t,x,x'),$$
$$\mathbf{Y}=f_2(t,y,y').$$

Опредѣленіе *криволинейнаго* движенія точки $\mathcal{M}$ въ указанномъ случаѣ приводится къ опредѣленію *прямолинейныхъ движеній* ея проекцій $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Интегрируя уравненіе

$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=f_1(t,x,x'),$$

получимъ два интеграла, содержащіе двѣ постоянныхъ произвольныхъ C_1 и D_1; интегрируя уравненіе:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = f_2(t, y, y'),$$

получимъ еще два интеграла, содержащіе тоже двѣ постоянныхъ произвольныхъ C_2 и D_2 ; для опредѣленія величинъ C_1 , D_1 , C_2 и D_2 должны быть извѣстны начальныя данныя:

$$\text{при } t = 0$$

$$x_0 = a \ ; \ y_0 = b \ ;$$

$$x'_0 = \alpha \ ; \ y'_0 = \beta .$$

Получивъ такимъ образомъ выраженія для x и y въ функціяхъ времени, исключаемъ изъ нихъ t , если это возможно, и находимъ уравненіе траекторіи точки.

Первый *примѣръ:* Криволинейное движеніе точки при дѣйствіи силы тяжести.

Ось OX горизонтальна; ось OY направлена по вертикали вверхъ (черт.41).

Дано:

$$X = 0 \ ; \ Y = -mg;$$

$$x_0 = 0 \ , \ y_0 = 0 .$$

$$x'_0 = v_0 \cdot \cos\gamma = \alpha,$$

$$y'_0 = v_0 \cdot \sin\gamma = \beta .$$

Дифференціальныя уравненія движенія, по сокращеніи на m, будутъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Интегралы уравненія (1) будутъ:

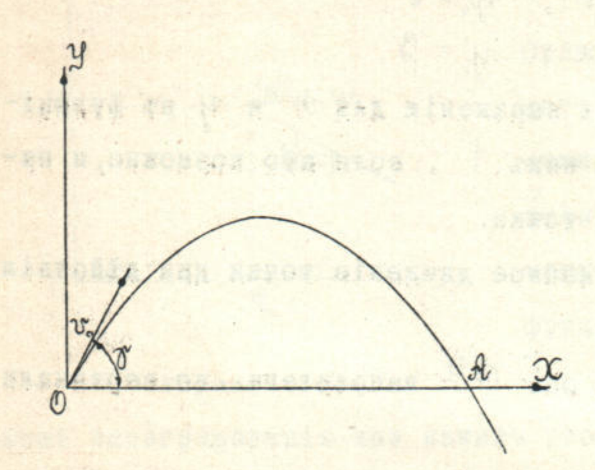
$$x' = \alpha \ , \quad x = \alpha t.$$

Интегралы уравненія (2):

$$y' = -gt + \beta ;$$
$$y = -\frac{gt^2}{2} + \beta t.$$

Исключая t изъ выраженій x и y, получимъ уравненіе траекторіи точки:

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x - \frac{g}{2\alpha^2} x^2 \qquad (3)$$



Чертежъ 41.

уравненіе (3) есть уравненіе *параболы*.

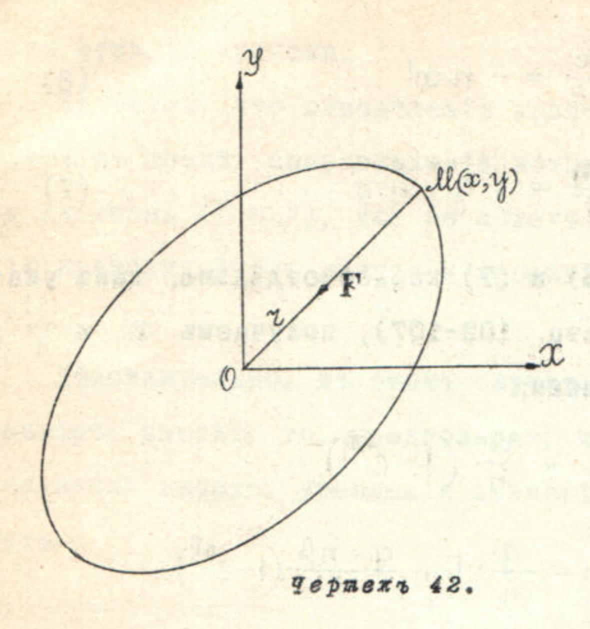
Пользуясь найденными уравненіями, легко рѣшить рядъ вопросовъ относительно разсматриваемаго движенія точки, какъ-то: опредѣлить въ зависимости отъ величины начальной скорости и ея направленія, время и высоту поднятія точки, дальность ея полета OA; далѣе опредѣлить уголъ γ для наибольшей дальности полета при данной величинѣ начальной скорости v_0; опредѣлить уголъ γ, подъ которымъ нужно бросить тяжелую точку, чтобы эна при заданной величинѣ начальной скорости v_0 прошла черезъ точку $C(x_1, y_1)$.

Второй *примѣръ*. Криволинейное движеніе точки при дѣйствіи силы притяженія къ неподвижному центру, пропорціональной разстоянію.

Пусть на точку $M(x, y)$ (черт.42) дѣйствуетъ сила $F = k^2 m r$; проекціи силы F на оси OX и OY будутъ:

$$X = -k^2 \cdot m \cdot r \cdot \frac{x}{r} = -k^2 \cdot m \cdot x,$$

$$Y = -k^2 \cdot m \cdot r \cdot \frac{y}{r} = -k^2 \cdot m \cdot y.$$



Чертежъ 42.

Уравненія движенія, по сокращеніи на m, будутъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y.$$

Вторые интегралы задачи, какъ извѣстно изъ предыдущей главы (стр. 100), будутъ:

$$x = a \cdot \cos kt + \frac{\alpha}{k} \cdot \sin kt \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$y = b \cdot \cos kt + \frac{\beta}{k} \cdot \sin kt \ldots\ldots\ldots (5)$$

Исключивъ изъ уравненій (4) и (5) время, найдемъ уравненіе траекторіи точки; такъ какъ это уравненіе будетъ, очевидно, второй степени, а x и y имѣютъ конечныя значенія, то траекторія точки будетъ *эллипсъ*.

Третій *примѣръ*.

Криволинейное движеніе точки при дѣйствіи силы тяжести въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально первой степени скорости (n, m, v).

Проекціи равнодѣйствующей двухъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, будутъ:

$$X = -n \cdot m \cdot x',$$

$$Y = -mg - n \cdot m \cdot y',$$

въ предположеніи, что ось OY направлена по вертикали вверхъ.

Уравненія движенія, по сокращеніи на m, представятся въ видѣ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n \cdot x' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\frac{d^2y}{dt} = -g - n \cdot y' \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Интегрируя уравненія (6) и (7) каждое отдѣльно, какъ указано въ предыдущей главѣ (стр. 102-107), получаемъ x и y, какъ извѣстныя функціи времени:

$$x = a + \frac{\alpha}{n}\left(1 - e^{-nt}\right)$$

$$y = b - \frac{g}{n}t + \frac{g + n\beta}{n^2}\left(1 - e^{-nt}\right)$$

исключая изъ этихъ уравненій время t, получимъ уравненіе траекторіи точки.

Четвертый *примѣръ*.

Криволинейное движеніе точки въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально первой степени скорости, при дѣйствіи силы притяженія къ неподвижному центру, пропорціональной разстоянію.

Проекціи равнодѣйствующей двухъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, будутъ:

$$X = -k^2 m x - n m x';$$
$$Y = -k^2 m y - n m y'.$$

Уравненія движенія по сокращеніи на m представятся въ видѣ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x - n x' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 y - n y' \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Интегрируя уравненія (8) и (9) каждое отдѣльно, какъ указано въ предыдущей главѣ (стр.110-114), находимъ x и y,

какъ функціи времени.

Замѣтимъ, что опредѣленіе криволинейнаго движенія тяжелой точки въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально *квадрату скорости* (n,m,v), уже не можетъ быть сведено къ опредѣленію прямолинейныхъ движеній проекцій этой точки на оси OX и OY.

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ, если точка движется, напримѣръ, вверхъ, то, предполагая, что ось OY направлена по вертикали вверхъ, уравненія движенія по сокращеніи на m, будутъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n \cdot v \cdot x' ;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - n \cdot v \cdot y' ;$$

а такъ какъ

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2} ,$$

то и въ первое, и во второе уравненіе движенія войдутъ и x', и y'.

Подобный же случай представляетъ движеніе точки, при дѣйствіи центральной силы, обратно пропорціональной квадрату разстоянія: уравненія этого движенія по сокращеніи на m, будутъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2x}{r^3} ;$$

и

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2y}{r^3} .$$

-------- " --------

НЕПЛОСКОЕ ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ.

Если при движеніи точки сила, къ ней приложенная, не остается въ одной плоскости, проходящей черезъ начальныя направленія скорости и силъ, то точка будетъ описывать кривую двоякой кривизны.

Въ этомъ случаѣ необходимо взять три координатныя оси: OX OY и OZ

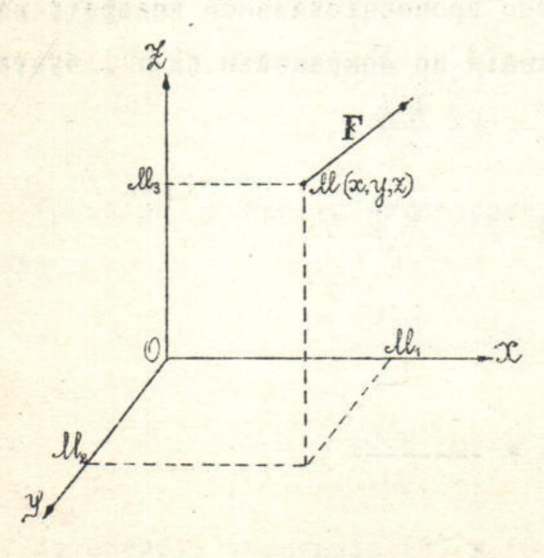
Пусть на точку $M(x,y,z)$ дѣйствуетъ сила F, проекціи которой: X, Y, Z. Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = X ,$$

$$m\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = Y ,$$

$$m\cdot\frac{d^2z}{dt^2} = Z .$$

Вообще говоря, X, Y, Z выражаются какъ функціи отъ перемѣнныхъ: t, x, y, z, x', y', z' - и общихъ пріемовъ для рѣшенія вопроса о движеніи указать нельзя.



Чертежъ 43.

Простѣйшій случай представляется тогда, когда мы можемъ опредѣлить порознь движеніе каждой изъ трехъ проекцій M_1, M_2 и M_3 точки

M на координатныя оси (черт.43); для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$X = f_1(t, x, x'),$$
$$Y = f_2(t, y, y'),$$
$$Z = f_3(t, z, z').$$

Опредѣленіе движенія точки M *по кривой двоякой кривизны* въ указанномъ случаѣ приводится къ опредѣленію *прямолинейныхъ движеній* ея проекцій M_1, M_2 и M_3.

Интегрируя три уравненія движенія:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = f_1(t, x, x');$$
$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = f_2(t, y, y');$$
$$m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = f_3(t, z, z').$$

получимъ шесть интеграловъ, содержащихъ шесть постоянныхъ произвольныхъ: C_1, D_1, C_2, D_2, C_3 и D_3, для опредѣленія которыхъ необходимо знать начальныя данныя: $x_0 = a$, $y_0 = b$, $z_0 = c$, $x'_0 = \alpha$, $y'_0 = \beta$; $z'_0 = \gamma$; $t = t_0$ (часто $t_0 = 0$).

Примѣръ. Движеніе точки M при дѣйствіи пропорціональныхъ разстоянію силъ притяженія къ неподвижному центру O и къ центру C, который равномѣрно движется по оси OX (черт.44).

Уравненіе движенія притягивающаго центра C:

$$x_c = a + bt.$$

Пусть величины силъ притяженія будутъ:

$$k^2 \cdot m \cdot \overline{MO} \quad и \quad n^2 \cdot m \cdot \overline{MC};$$

тогда проекціи ихъ равнодѣйствующей на оси OX, OY и OZ будутъ:

$$X = -k^2 mx - n^2 m(x - x_c),$$

или, замѣняя x_c его выраженіемъ:

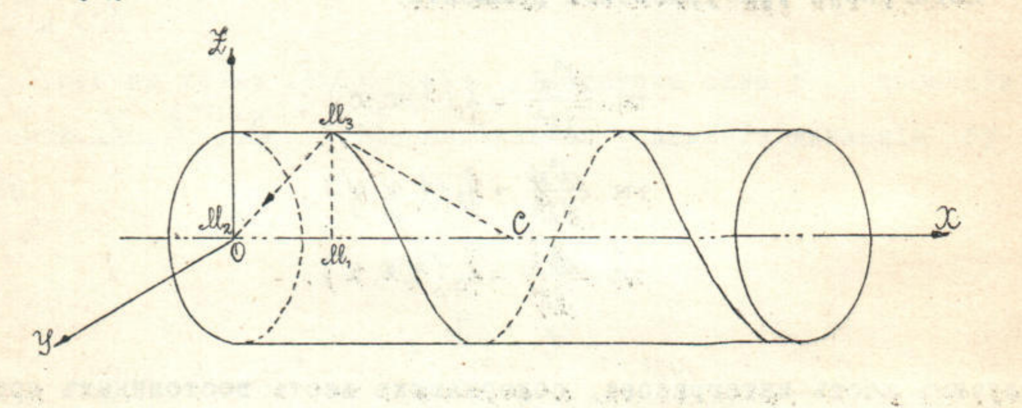
$$\left.\begin{aligned} X &= -m(k^2+n^2)x + mn^2(a+bt); \\ Y &= -mk^2y - mn^2y = -m(k^2+n^2)y; \\ Z &= -m(k^2+n^2)z. \end{aligned}\right\}$$

также

Обозначимъ для краткости:

$$k^2 + n^2 = p^2,$$

тогда дифференціальныя уравненія движенія, по сокращеніи на m, будутъ:



Чертежъ 44.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -p^2x + n^2(a+bt) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -p^2y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

и

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -p^2z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Интегралы уравненій (11) и (12) раньше уже были найдены.

При интегрированіи же уравненія (10), чтобы освободиться отъ члена $n^2(a+bt)$, положимъ:

$$x = \xi + \alpha + \beta t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

тогда

$$\xi'' = x'' = -p^2(\xi + \alpha + \beta t) + n^2(a+bt);$$

если подобрать α и β такъ, чтобы онѣ удовлетворяли уравненіямъ:

$$-p^2\cdot\alpha + m^2\cdot a = 0$$

и

$$-p^2\beta + n^2\cdot b = 0\,,$$

откуда

$$\alpha = \frac{n^2\cdot a}{p^2}\,,$$

и

$$\beta = \frac{n^2\cdot b}{p^2}\,,$$

то уравненіе (10) приметъ такой видъ:

$$\xi'' = -p^2\xi\;; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

соотвѣтствующіе интегралы намъ извѣстны.

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$x = \left(x_0 - \frac{n^2 a}{p^2}\right)\cos pt + \left(\frac{x_0}{p} - \frac{n^2 b}{p^2}\right)\sin kt + \frac{n^2}{p^2}(a+bt),$$

$$y = y_0 \cos pt + \frac{y_0'}{p}\cdot \sin pt,$$

$$z = z_0 \cos pt + \frac{z_0'}{p}\cdot \sin pt.$$

Исключая t изъ двухъ послѣднихъ уравненій, получимъ, какъ извѣстно, уравненіе эллипса въ плоскости YOZ; отсюда слѣдуетъ, что траекторія точки расположена на эллиптическомъ цилиндрѣ, ось котораго есть ось OX; такъ какъ при измѣненіи t на величину $\frac{2\pi}{p}$ координата x получаетъ приращеніе, равное $\frac{2bn^2\pi}{p^2}$, то траекторія будетъ имѣть видъ винтовой линіи.

ГЛАВА III.

ЗАКОНЪ ЖИВОЙ СИЛЫ.

Въ первой части "Курса Теоретической Механики" (изданіе 1914 г.)*) были уже установлены какъ понятіе о *работѣ силы*, къ точкѣ приложенной, такъ и понятіе о *живой силѣ* матеріальной точки; тамъ же были выведены и уравненія, выражающія *законъ живой силы* въ случаѣ одной матеріальной точки:

въ дифференціальной формѣ:

$$d\frac{mv^2}{2} = X\cdot dx + Y\cdot dy + Z\cdot dz \ldots\ldots\ldots (1)$$

въ конечной формѣ:

$$\frac{m\cdot v_2^2}{2} - \frac{m\cdot v_1^2}{2} = \int_{M_1}^{M_2}(X\cdot dx + Y\cdot dy + Z\cdot dz), \ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ

$$X\cdot dx + Y\cdot dy + Z\cdot dz = F\cos(F, v)|dz|$$

§ 1. *Силы, имѣющія потенціалъ.*

Для того, чтобы опредѣлить конечную работу силы, нужно, вообще говоря, умѣть выразить элементарную работу $X dx + Y dy + Z dz$ въ функціи отъ одной изъ перемѣнныхъ, напримѣръ, t или s или x, а для этого, вообще говоря, необходимо предварительно знать выраженія координатъ точки въ функціяхъ отъ времени.

----

*) *Кинатика. Основныя понятія. Стр. 174 - 181.*

Но существуетъ очень важный случай, когда, и не зная движенія точки, мы можемъ опредѣлить работу силы, - это будетъ тогда, когда сила зависитъ только отъ *положенія* точки и притомъ элементарная работа силы выражается *полнымъ дифференціаломъ* нѣкоторой функціи отъ координатъ точки:

$$F \cdot \cos(F,v) \cdot |ds| = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = d\,U(x,y,z) \; \ldots\ldots \quad (3)$$

функція U называется *силовою функціей;* сила F называется въ этомъ случаѣ *силою, имѣющею потенціалъ.*

Если сила $F(X,Y,Z)$ имѣетъ потенціалъ, то, на основаніи уравненія (3), имѣемъ:

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

откуда

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \; Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \; Z = \frac{\partial U}{\partial z} \; \ldots\ldots \quad (4)$$

Слѣдовательно, сила имѣетъ потенціалъ, когда ея проекціи на координатныя оси выражаются частными производными отъ одной и той же функціи по соотвѣтствующимъ координатамъ точки ; проекціи силы въ этомъ случаѣ удовлетворяютъ слѣдующимъ тремъ равенствамъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial Y}{\partial x}, \\ \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ \frac{\partial Z}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Къ числу силъ, имѣющихъ потенціалъ, принадлежатъ: 1, *сила тяжести,* 2, *центральныя силы, зависящія только отъ разстоянія.* Въ самомъ дѣлѣ, пусть ось направлена по вертикали вверхъ (чертежъ 45), тогда, въ случаѣ *силы тяжести* имѣемъ:

$$X = 0, \; Y = 0, \; Z = -mg;$$

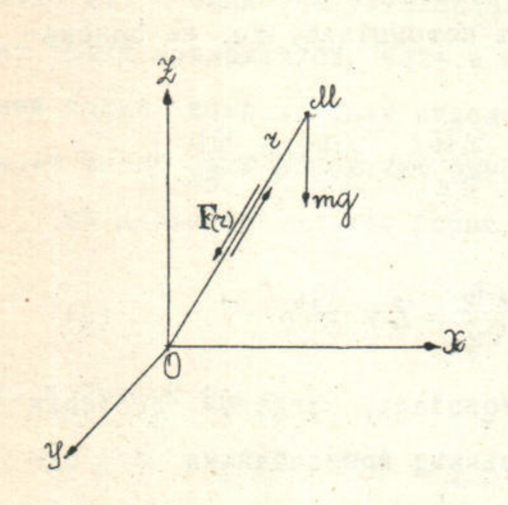
поэтому:

$$F\cdot|ds|\cdot\cos(F,v) = -mg\cdot dz = d(-mgz) = dU$$

и силовая функцiя будетъ:

$$U = -mgz.$$

Разсмотримъ случай *центральной силы притяженiя* или *отталкиванiя,* величина которой выражается *функцiей разстоянiя* точки отъ дѣйствующаго неподвижнаго центра. Примемъ центръ силы за начало координатъ.



Чертежъ 45.

Пусть на точку M дѣйствуетъ центральная сила, равная $F(r)$; условимся брать функцiю $F(r)$ со знакомъ $+$, когда сила отталкивательная, и со знакомъ $-$, когда сила притягательная.

Проекцiя силы $\pm F(r)$ на координатныя оси OX , OY , OZ будутъ:

$$X = \pm F(r)\cdot\frac{x}{r},$$

$$Y = \pm F(r)\cdot\frac{y}{r},$$

$$Z = \pm F(r)\cdot\frac{z}{r},$$

слѣдовательно, элементарная работа силы равна:

$$X\cdot dx + Y\cdot dy + Z\cdot dz = \pm F(r)\cdot\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r} =$$

$$= \pm F(r)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{r} = \pm F(r)\cdot\frac{r\cdot dr}{r} = \pm F(r)\cdot dr.$$

очевидно, что $\pm F(r)\cdot dr$ есть дифференціалъ функціи, которая равна:

$$\int \pm F(r)\cdot dr.$$

Такимъ образомъ, для разсматриваемой центральной силы силовая функція будетъ:

$$U = \int \pm F(r)\cdot dr.$$

Въ частномъ случаѣ, когда сила притяженія къ началу координатъ слѣдуетъ закону Ньютона:

$$F = -\frac{k^2 \cdot m}{r^2}$$

и силовая функція будетъ:

$$U = \int -\frac{k^2 m}{r^2}\, dr = \frac{k^2 m}{r}.$$

Если на точку дѣйствуютъ силы: F_1, имѣющая потенціалъ $U_1(x_1, y_1, z_1)$ сила F_2, имѣющая потенціалъ $U_2(x_2, y_2, z_2)$, сила F_3, имѣющая потенціалъ $U_3(x_3, y_3, z_3)$ и т.д., то силовая функція для равнодѣйствующей будетъ, очевидно, равна суммѣ силовыхъ функцій для ея составляющихъ:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots\ldots$$

Примѣчаніе. Замѣтимъ, что къ найденному выраженію силовой функціи всегда можетъ быть прибавлена какая-угодно *постоянная* величина, напримѣръ, для силы тяжести можемъ положить:

$$U = -mg\cdot z + const.$$

Разсмотримъ нѣкоторыя *свойства силы, имѣющей потенціалъ.*

Пусть сила, приложенная къ точкѣ, имѣетъ силовую функцію:

$$U(x,y,z).$$

Для опредѣленнаго положенія точки, которому соотвѣтствуютъ опредѣленныя значенія координатъ x_1, y_1, z_1, силовая функція U имѣетъ опредѣленную величину:

$$U(x_1,y_1,z_1) = C$$

Приравнивая функцію $U(x, y, z)$, гдѣ x, y, z величины перемѣнныя, постоянной C, получимъ уравненіе:

$$U(x,y,z) = C,$$

которое представляетъ уравненіе поверхности, проходящей черезъ данное положеніе точки; эта поверхность называется *поверхностью уровня* для данной силы; постоянная C называется *параметромъ поверхности*, - во всѣхъ точкахъ одной и той же поверхности уровня силовая функція имѣетъ одно и то же значеніе.

При различныхъ значеніяхъ параметра C получаемъ *систему поверхностей уровня*, заполняющую все пространство, внутри котораго силовая функція имѣетъ дѣйствительныя значенія.

Для силы тяжести поверхности уровня суть горизонтальныя плоскости

$$-m \cdot g \cdot z = C,$$

слѣдовательно:

$$z = const.$$

Для центральной силы, зависящей только отъ разстоянія, поверхности уровня суть поверхности шаровъ съ центромъ въ центрѣ силы; въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$U = \int \pm F(r) \cdot dr = f(r),$$

гдѣ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ;$$

тогда уравненіе поверхности уровня будетъ:

$$f(r) = C,$$

откуда

$$r = const.$$

Положимъ, что черезъ точку M (x , y , z), на которую дѣйствуетъ сила F , имѣющая потенціалъ, проведена поверхность уровня $U = C$.

Найдемъ направленіе силы F въ точкѣ M.

Косинусы угловъ, составляемыхъ силою F съ координатными осями OX , OY , OZ , будутъ:

$$\cos(F,X) = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\Delta U}\ ,$$

$$\cos(F,Y) = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\Delta U}\ ,$$

$$\cos(F,Z) = \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\Delta U}\ ,$$

гдѣ

$$\Delta U = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}\ .$$

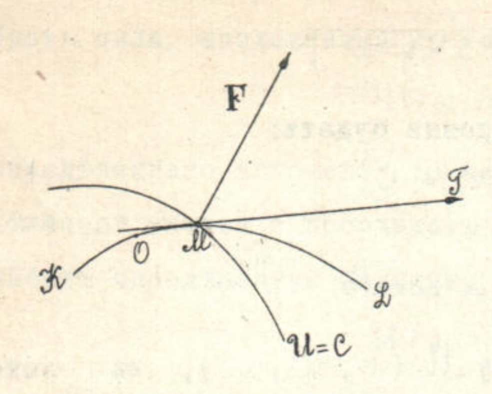
Извѣстно, что такими формулами выражаются косинусы угловъ, составляемыхъ съ координатными осями OX , OY , OZ нормалью въ точкѣ M къ поверхности, выражаемой уравненіемъ:

$$U(x,y,z) = const.\ ;$$

слѣдовательно, сила, имѣющая потенціалъ и приложенная къ точкѣ M, *направлена по нормали* къ поверхности уровня, проведен-

ной черезъ точку $\mathcal{M}$ *).

Найдемъ выраженіе *проекціи силы* $\mathbf{F}$, имѣющей потенціалъ, на направленіе *касательной* $\mathcal{MT}$ *къ нѣкоторой данной кривой* $\mathcal{KL}$, проходящей черезъ точку $\mathcal{M}$ (x, y, z) (черт. 46).



Чертежъ 46.

Выразимъ координаты точки $\mathcal{M}$ въ видѣ функцій отъ длины дуги s, отсчитываемой по кривой $\mathcal{KL}$ отъ произвольно выбранной точки O; пусть будутъ:

$$x = \varphi_1(s),$$
$$y = \varphi_2(s),$$
$$z = \varphi_3(s);$$

тогда силовая функція U можетъ быть выражена какъ функція отъ s: $U(s)$.

Положимъ, что касательная $\mathcal{MT}$ проведена въ сторону возрастающихъ дугъ; тогда имѣемъ:

$$\mathbf{F}\cos(\mathbf{F}, \mathcal{MT}) = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}$$

Трехчленъ въ правой части уравненія представляетъ полную производную функціи по дугѣ:

$$\frac{dU}{ds};$$

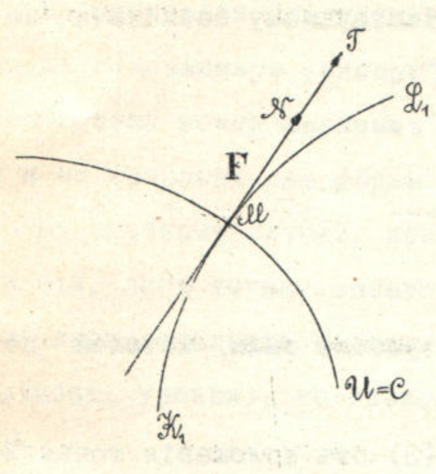
слѣдовательно:

---

*) *Пространство, заполненное поверхностями уровня данной силовой функціи, называется* с и л о в ы м ъ п о л е м ъ; *кривыя, пересѣкающія поверхности уровня ортогонально къ нимъ, называются* с и л о в ы м и л и н і я м и.

$$F \cdot \cos(F.\mathcal{MT}) = \frac{\partial \mathcal{U}}{ds} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Полученный результатъ мы примѣнимъ къ частному случаю, когда кривая $\mathcal{K}_1\mathcal{L}_1$ направлена *ортогонально* къ пересѣкаемымъ ею поверхностямъ уровня (черт. 47). Касательная $\mathcal{MT}$ къ кривой $\mathcal{K}_1\mathcal{L}_1$ въ точкѣ $\mathcal{M}$ будетъ въ то же время нормалью въ этой точкѣ къ поверхности уровня.



Чертежъ 47.

Элементъ дуги кривой $\mathcal{K}_1\mathcal{L}_1$ обозначимъ черезъ dn; тогда упомянутый выше дифференціалъ ds замѣнится дифференціаломъ dn, который будетъ также величиной положительной.

На основаніи уравненія (7) имѣемъ:

$$F \cdot \cos(F, \mathcal{N}) = \frac{d\mathcal{U}}{dn}$$

Такъ какъ сила F направлена по нормали $\mathcal{N}$, то ея проекція на нормаль можетъ быть равна $+F$ или $-F$; слѣдовательно:

$$\frac{d\mathcal{U}}{dn} = +F, \text{ когда } \frac{d\mathcal{U}}{dn} > 0,$$

и

$$\frac{d\mathcal{U}}{dn} = -F, \text{ когда } \frac{d\mathcal{U}}{dn} < 0.$$

Если $\frac{d\mathcal{U}}{dn} > 0$, то значеніе $\mathcal{U}$ возрастаетъ по направленію нормали, такъ какъ $dn > 0$; нормаль $\mathcal{MN}$ въ этомъ случаѣ называется ***положительною:*** она направлена въ ту часть пространства, гдѣ разность $\mathcal{U} - C$, равная нулю на поверхности, получаетъ положительныя значенія.

Отсюда заключаемъ, что сила F, имѣющая потенціалъ и при-

ложенная къ точкѣ $\mathcal{M}$, всегда направлена по *положительной нормали* къ поверхности *уровня,* проведенной черезъ точку $\mathcal{M}$. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы получили, что величину силы F можно выразить производной: $\frac{dU}{dn}$, т.е. какъ предѣлъ отношенія приращенія параметра поверхности уровня къ соотвѣтствующему безконечно малому отрѣзку положительной нормали *).

------ " ------

Обратимся теперь къ опредѣленію *работы* силы, имѣющей потенціалъ.

Интегрируя обѣ части уравненія (3) отъ положенія точки $\mathcal{M}_1$ до положенія $\mathcal{M}_2$, находимъ:

$$\int_{\mathcal{M}_1}^{\mathcal{M}_2}(Xdx+Ydy+Zdz)=U_2-U_1 \quad \dots\dots \quad (8)$$

гдѣ U_1 и U_2 суть значенія силовой функціи въ точкахъ $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$.

Въ большинствѣ случаевъ, какъ напримѣръ, для силы тяжести и силъ центральныхъ, силовая функція U есть функція *однозначная.* Тогда для положенія $\mathcal{M}_1$ имѣемъ одно опредѣленное значеніе функціи U_1 :

---

*) *Для большей общности за опредѣленіе силовой функціи могутъ быть взяты ур-ія (4), - тогда возможны и такія силовыя функціи, которыя ясно содержатъ время:*

$$U(x,y,z,t);$$

въ этомъ случаѣ уравненіе (3) уже не имѣетъ мѣста:

$$F\cdot\cos(F\cdot v)\cdot|ds| = dU(x,y,z,t)-\frac{\partial U}{\partial t}dt.$$

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}(x_1, y_2, z_1),$$

а также для положенія $\mathcal{M}_2$:

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}(x_2, y_2, z_2).$$

На основаніи предыдущаго уравненія заключаемъ: *если сила имѣетъ однозначную силовую функцію, то работа силы на нѣкоторомъ пути точки зависитъ только отъ крайнихъ положеній точки и не зависитъ отъ формы пути.*

Въ частномъ случаѣ, при существованіи однозначной силовой функціи, если точка, совершивъ нѣкоторый путь, возвращается въ свое первоначальное положеніе (общѣе - на первоначальную поверхность уровня), то работа силы на всемъ пути будетъ *равна нулю.*

§ 2. *"Законъ сохраненія живой силы" или "законъ сохраненія полной энергіи точки".*

Примѣнимъ законъ живой силы къ тому случаю, когда сила, приложенная къ точкѣ, имѣетъ *потенціалъ.* Уравненіе (1) даетъ намъ въ этомъ случаѣ, въ силу уравненія (3):

$$d\,\frac{mv^2}{2} = d\mathcal{U}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

а уравненіе (2) въ силу уравненія (8):

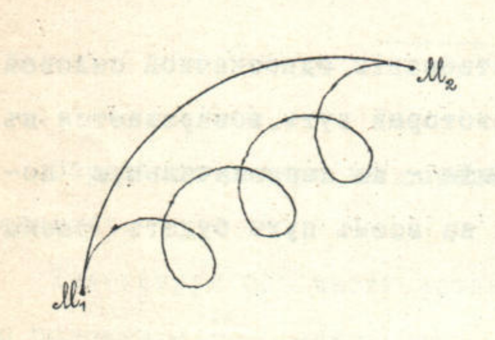
$$\frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} = \mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Уравненіе (10) выражаетъ, что приращеніе живой силы точки при переходѣ ея изъ одного положенія въ другое равняется разности значеній силовой функціи для крайнихъ положеній точки.

Когда силовая функція есть функція *однозначная,* какъ напримѣръ, въ случаѣ силы тяжести или силъ центральныхъ, мы выводимъ изъ уравненія (10) слѣдующее важное *заключеніе:* если

равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ точкѣ, имѣетъ *однозначную* силовую функцію, то *приращеніе живой силы точки на любой части ея пути не зависитъ отъ формы пути,* а только отъ начальнаго и конечнаго положенія точки на этой части пути, и равно разности значеній параметровъ соотвѣтствующихъ крайнихъ поверхностей уровня.

Отсюда слѣдуетъ, что при существованіи однозначной силовой функціи, если точка возвращается въ прежнее положеніе, то *возвращается съ тою же живою силою,* которую она имѣла при выходѣ изъ этого положенія; поэтому относительно уравненія (10) можно сказать, что при однозначной функціи U оно выражаетъ *законъ сохраненія живой силы.*



Чертежъ 48.

Интегрируя уравненіе:

$$d\frac{m.v^2}{2} = dU,$$

мы получимъ:

$$\frac{m.v^2}{2} = U + h,$$

или

$$\frac{m.v^2}{2} - U = h, \quad \text{..................} (11)$$

гдѣ h постоянная произвольная, опредѣляемая по начальнымъ даннымъ.

Уравненіе (11) представляетъ *первый интегралъ* задачи о движеніи точки при дѣйствіи силы, имѣющей потенціалъ $U(x, y, z)$; этотъ интегралъ называется *интеграломъ живой силы.*

Такимъ образомъ, для дифференціальныхъ уравненій движенія свободной точки *интегралъ живой силы можетъ быть написанъ вся-*

*кій разъ, какъ сила, приложенная къ точкѣ имѣетъ потенціалъ**).

Выяснимъ значеніе этого интеграла.

Въ уравненіи (11) вмѣсто силовой функціи U возьмемъ $(U - const)$, причемъ $const$ подберемъ такъ, чтобы для всѣхъ положеній разсматриваемой точки выполнялось условіе:

$$-U + const \geq 0.$$

Величина, выражаемая формулой:

$$\left[-U(x,y,z) + const\right]$$

называется *потенціальною энергіей* матеріальной точки въ положеніи ея, опредѣляемомъ координатами x, y, z; для измѣренія потенціальной энергіи служатъ тѣ же единицы, что и для измѣренія работы силы.

Интегралъ живой силы (11) можемъ представить въ видѣ:

$$\frac{mv^2}{2} + (-U + const) = h_1, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

гдѣ h_1 есть величина постоянная.

Отсюда заключаемъ: когда сила, приложенная къ точкѣ, имѣетъ потенціалъ, то сумма кинетической и потенціальной энергій матеріальной точки во все время движенія сохраняетъ постоянную величину.

Сумму кинетической и потенціальной энергій матеріальной точки называютъ ея *полной энергіей*.

Такимъ образомъ, уравненіе (12), а слѣдовательно, и равносильноееему уравненіе (11) выражаетъ *законъ сохраненія полной энергіи матеріальной точки*.

---

*) *Если силовая функція явно содержитъ время, интегралъ живой силы не имѣетъ мѣста.*

ГЛАВА IV.

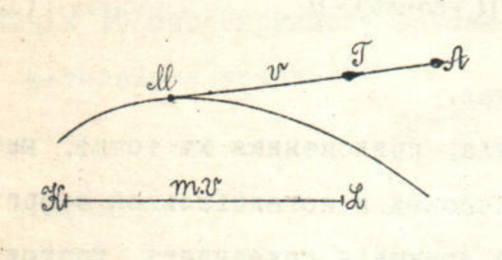
"ЗАКОНЪ МОМЕНТОВЪ" ИЛИ "ЗАКОНЪ ПЛОЩАДЕЙ".

§ 1. *Количество движенія матеріальной точки.*

Опредѣленіе. Количество движенія матеріальной точки есть векторъ, имѣющій направленіе скорости точки, и по величинѣ равный произведенію массы точки на ея скорость.

Пусть точка $\mathcal{M}$, масса которой равна m, въ нѣкоторый моментъ имѣетъ скорость (черт. 49)

$$v = \mathcal{M}\mathcal{T}.$$



Чертежъ 49.

Произведеніе mv, какъ всякую величину, выражающуюся нѣкоторымъ опредѣленнымъ числомъ, можно изобразить нѣкоторымъ отрѣзкомъ прямой.

Пусть, напримѣръ:

$$mv = \mathcal{K}\mathcal{L}.$$

Отложимъ этотъ отрѣзокъ по прямой $\mathcal{M}\mathcal{T}$ отъ точки $\mathcal{M}$; векторъ

$$\mathcal{M}\mathcal{A} = \mathcal{K}\mathcal{L} = mv.$$

и есть количество движенія матеріальной точки $\mathcal{M}$.

Единица, служащая для *измѣренія* количества движенія точки, символически представится въ видѣ:

$$(\text{ед. массы}) \times (\text{ед. скор.}) = \frac{(\text{ед. массы}) \times (\text{ед. длины})}{(\text{ед. времени})} = \mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1},$$

а въ системѣ CGS

$$\frac{(\text{граммъ}) \times (\text{сант.})}{(\text{сек.})} = G.C.S^{-1}.$$

Проекціи количества движенія матеріальной точки на координатныя оси будутъ:

$$MA\cos(MA,X) = m\cdot v\cdot\cos(v,X) = m\cdot x',$$

$$MA\cdot\cos(MA,Y) = m\cdot v\cdot\cos(v,Y) = m\cdot y',$$

$$MA\cdot\cos(MA,Z) = m\cdot v\cdot\cos(v,Z) = m\cdot z',$$

гдѣ x, y, z координаты точки M, а

$$x' = \frac{dx}{dt},\ y' = \frac{dy}{dt},\ z' = \frac{dz}{dt}.$$

Такъ какъ *количество движенія* точки есть, подобно силѣ, *векторъ*, то мы можемъ ввести понятія: *"моментъ количества движенія относительно точки"* и *"моментъ количества движенія относительно оси"*.

Все, что было изложено въ курсѣ Статики*) о моментѣ силы, имѣетъ мѣсто для момента количества движенія.

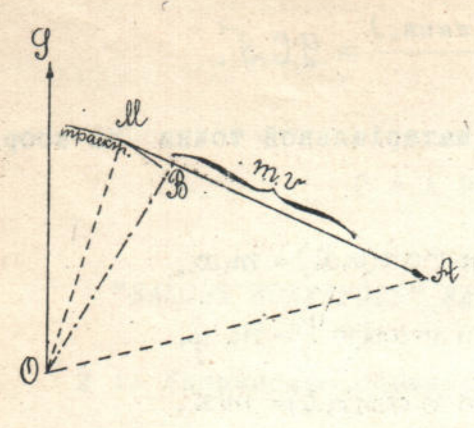
Моментъ количества движенія относительно точки O есть векторъ OG (черт.50), который *по величинѣ* равенъ произведенію величины количества движенія MA на длину перпендикуляра OB, опущеннаго изъ точки O на MA, и *направленъ* по перпендикуляру къ плоскости MOA въ такую сторону, чтобы для наблюдателя, помѣщеннаго такъ, что перпендикуляръ идетъ отъ ногъ къ головѣ, количество движенія было направлено слѣва направо:

$$OG = MA.OB = 2\,\text{пл.}\,\Delta\,MOA.$$

Моментъ количества движенія относительно оси JH (черт.

---

*) См. *"Курсъ Теоретической Механики"*, *часть I*, *изданіе 1914 года, стр. 78 - 82.*

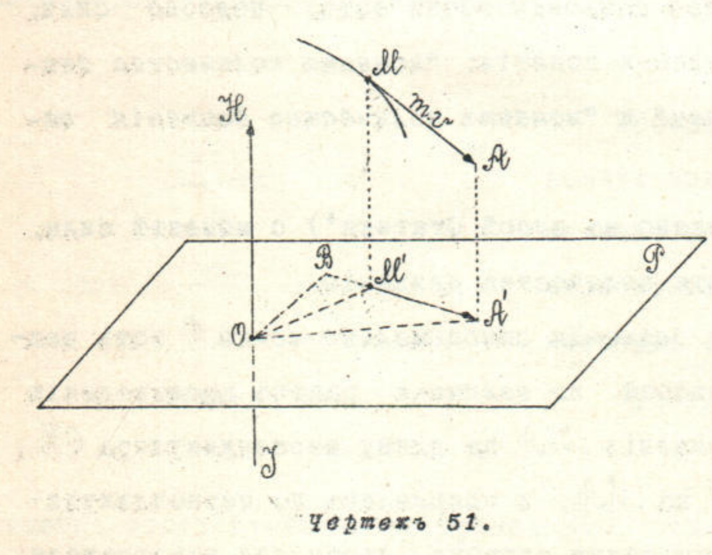


Чертежъ 50.

51) равенъ взятому со знакомъ + или — произведенію проекціи $\mathcal{M}'\mathcal{A}'$ количества движенія $\mathcal{MA}$ на плоскость $\mathcal{P}$, перпендикулярную къ оси $\mathcal{JH}$, на длину OB ($OB \perp \perp \mathcal{M}'\mathcal{A}'$), которая равна кратчайшему разстоянію между количествомъ движенія $\mathcal{MA}$ и осью $\mathcal{JH}$, т.е.

$$\mathcal{M}'\mathcal{A}' \cdot OB = 2\,\text{пл.}\,\Delta\,\mathcal{M}'O\mathcal{A}';$$

это произведеніе берется со знакомъ $(+)$, если наблюдатель, помѣщенный такъ, что ось проходитъ отъ ногъ къ головѣ, видитъ количество движенія направленнымъ слѣва направо, и со знакомъ $(-)$ въ противоположномъ случаѣ; величина произведенія можетъ быть отложена на оси отъ любой точки въ ту или другую сторону, смотря по знаку.



Чертежъ 51.

Моментъ количества движенія относительно оси равенъ проекціи на ось момента количества движенія относительно какойлибо точки оси; - эта теорема слѣдуетъ изъ соотвѣтствующей теоремы Статики*).

---

*) *Курсъ Теоретической Механики, часть I, стр. 79 (1914г.).*

АНАЛИТИЧЕСКІЯ ВЫРАЖЕНІЯ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНІЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ И ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ.

Обозначимъ координаты точки M черезъ x, y, z, тогда проекціи количества движенія на координатныя оси будутъ: mx', my', mz'. Подставляя въ извѣстныя формулы для момента силы относительно координатныхъ осей *) проекціи количества движенія вмѣсто проекцій силы, мы получимъ слѣдующія выраженія для моментовъ количества движенія относительно *координатныхъ осей*, которые будемъ обозначать черезъ l_x, l_y, l_z:

$$l_x = m\cdot(yz'-zy'),$$
$$l_y = m\cdot(zx'-xz'),$$
$$l_z = m\cdot(xy'-yx').$$

На основаніи приведенной выше теоремы, находимъ слѣдующія выраженія для проекцій на координатныя оси *момента* l количества движенія относительно *начала координатъ:*

$$l\cdot\cos(l,X) = m\cdot(yz'-zy'),$$
$$l\cdot\cos(l,Y) = m\cdot(zx'-xz'),$$
$$l\cdot\cos(l,Z) = m\cdot(xy'-yx').$$

Отсюда слѣдуютъ формулы, опредѣляющія величину и направленіе момента количества движенія относительно начала координатъ:

---

*) *См. часть I, формулы (1), стр. 80.*

$$l = m\sqrt{(yz'-zy')^2+(zx'\pm xz')^2+(xy'-yx')^2}\,,$$

$$\cos(l,X) = \frac{yz'-zy'}{R}\,,$$

$$\cos(l,Y) = \frac{zx'-xz'}{R}\,,$$

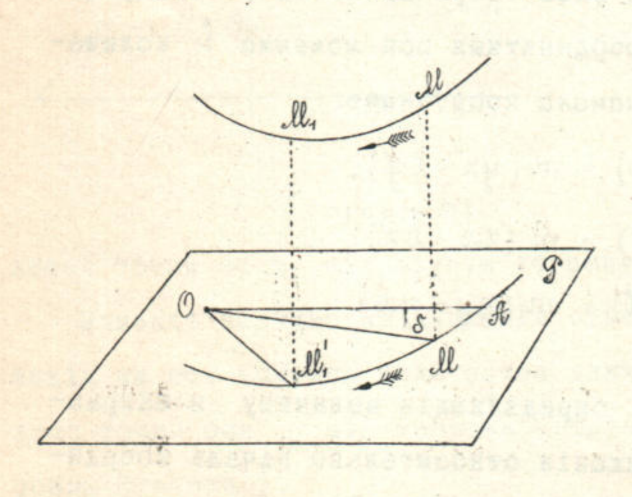
$$\cos(l,Z) = \frac{xy'-yx'}{R}\,;$$

гдѣ R обозначаетъ величину радикала въ выраженіи l.

Съ понятіемъ о моментѣ количества движенія точки относительно оси тѣсно связано понятіе о *секторіальной скорости точки.*

Когда точка M движется по своей траекторіи MM_1 (черт. 52), ея проекція M' на плоскость P будетъ описывать нѣкоторую кривую $M'M'_1$. Если мы изъ произвольно взятой точки O на плоскости P проведемъ радіусъ-векторъ OM, то при движеніи M по кривой, этотъ радіусъ-векторъ будетъ описывать площадь сектора S, которую условимся отсчитывать отъ нѣкотораго радіуса-вектора OA.

Площадь S есть функція времени. Какъ въ случаѣ движенія точки измѣненія съ теченіемъ времени длины пути s, проходимаго точкою, привело насъ къ понятію о скорости точки, совершенно такъ же здѣсь измѣненіе площади сектора S приводитъ насъ къ понятію о *секторіальной скорости.*



Чертежъ 52.

Знаемъ, что скорость точки въ моментъ t выражается производной $\frac{ds}{dt}$, аналогичнымъ образомъ мы получимъ, что *секто-*

ріальная скорость точки M въ плоскости P выражается производною $\frac{dS}{dt}$.

Знакъ производной $\frac{dS}{dt}$ указываетъ, возрастаетъ ли площадь сектора или убываетъ: когда $\frac{dS}{dt}>0$, площадь сектора возрастетъ, когда $\frac{dS}{dt}<0$, площадь сектора убываетъ.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНІЕ СЕКТОРІАЛЬНОЙ СКОРОСТИ.

а) Въ полярныхъ координатахъ.

Точку O беремъ за полюсъ, OA за постоянную ось. Координаты точки M' будутъ (черт.53):

$$r = OM',$$

$$\varphi = \angle AOM'.$$

Чертежъ 53.

Секторіальная скорость равна производной $\frac{dS}{dt}$, но дифференціалъ площади

$$dS = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot d\varphi,$$

а слѣдовательно, секторіальная скорость будетъ:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \frac{d\varphi}{dt} \cdots (3)$$

б) Въ прямоугольныхъ координатахъ.

Принимая OA за ось OX, воспользуемся слѣдующими формулами, выражающими полярныя координаты φ и r черезъ прямоугольныя x и y:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Изъ формулы (α):

$$d\varphi = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad ;$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{xy'-yx'}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{xy'-yx'}{x^2+y^2}$$

Принимая во вниманіе уравн. (3) и формулу (β), находимъ:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\cdot(xy'-y\cdot x') \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Сравнивая формулу (4) съ выраженіемъ момента количества движенія точки относительно оси OZ въ формулахъ (1), мы получаемъ слѣдующую *теорему:*

моментъ количества движенія точки относительно оси OZ равенъ удвоенной и умноженной на массу секторіальной скорости точки въ плоскости XOY.

Если секторіальную скорость точки въ плоскости XOY обозначимъ черезъ σ_{xy}, то

$$l_z = 2m\cdot\sigma_{xy}.$$

Разсматривая моментъ количества движенія точки относительно двухъ другихъ осей OX и OY и секторіальныя скорости σ_{zy} и σ_{zx} въ перпендикулярныхъ къ нимъ плоскостяхъ ZOY и ZOX, мы найдемъ:

$$l_x = 2m\,\sigma_{zy},$$

$$l_y = 2m\cdot\sigma_{zx}.$$

Такъ какъ всякую неподвижную ось можно принять за одну изъ

координатныхъ осей, напримѣръ, за ось Oz, и всякую плоскость, ей перпендикулярную, за плоскость xOy, поэтому изъ предыдущаго вытекаетъ слѣдующее общее предложеніе:

моментъ количества движенія матеріальной точки относительно всякой неподвижной оси равенъ удвоенной и умноженной на массу секторіальной скорости точки въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси, предполагая, что радiусы-векторы проекціи точки проводятся изъ точки пересѣченія оси съ плоскостью.

Если секторіальная скорость точки въ нѣкоторый моментъ *постоянна:*

$$\frac{dS}{dt} = A\,(\text{пост.}),$$

и если даны начальныя условія:

$$t_0 = 0,$$

$$S_0 = 0,$$

то

$$S = At,$$

т.е. площадь сектора S пропорціональна времени, причемъ A обозначаетъ величину площади, описываемой радіусомъ-векторомъ въ единицу времени, слѣдовательно, когда секторіальная скорость - величина постоянная, площадь, описываемая радіусомъ-векторомъ проекціи точки (въ случаѣ плоскаго движенія - радіусомъ-векторомъ самой движущейся точки) на плоскость въ единицу времени, будетъ *сохранять* свою величину.

§ 2. "ЗАКОНЪ МОМЕНТОВЪ" или "ЗАКОНЪ ПЛОЩАДЕЙ".

Найдемъ зависимость между моментомъ количества движенія матеріальной точки и моментомъ силы, къ точкѣ приложенной (или равнодѣйствующей силъ къ точкѣ приложенныхъ, - если ихъ нѣсколько).

Для этого воспользуемся дифференціальными уравненіями движенія точки:

$$\left.\begin{aligned} m x'' &= X, \\ m y'' &= Y, \\ m z'' &= Z. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Изъ уравненій (5) легко получить такія уравненія, правыя части которыхъ будутъ представлять извѣстныя выраженія моментовъ силы относительно координатныхъ осей:

$$L_x = yZ - zY,$$

$$L_y = zX - xZ,$$

$$L_z = xY - yX.$$

Множимъ третье изъ уравненій (5) на y, а второе на z, и послѣднее произведеніе вычитаемъ изъ предыдущаго - получаемъ:

$$m\cdot(y\cdot z'' - z\cdot y'') = y\cdot Z - z Y.$$

Лѣвая часть этого уравненія есть, какъ легко убѣдиться, производная по времени отъ выраженія $m(yz' - zy')$; слѣдовательно, имѣемъ:

$$\frac{d[m(yz' - zy')]}{dt} = yZ - zY,$$

или

$$\frac{dl_x}{dt} = L_x.$$

Это уравненіе выражаетъ *законъ моментовъ* относительно оси OX или *законъ площадей* въ плоскости ZOY.

первая производная по времени отъ момента количества движенія матеріальной точки относительно оси OX равна моменту силы, въ точкѣ приложенной, относительно той же оси OX.

Названіе: "законъ площадей" слѣдуетъ изъ того, что полученное уравненіе намъ даетъ:

$$2m\frac{d\sigma_{yz}}{dt} = L_x,$$

а секторіальная скорость опредѣляетъ измѣненіе нѣкоторой площади.

Такъ какъ всякую неподвижную ось можно принять за ось OX, то изъ предыдущаго вытекаетъ *общее выраженіе "закона моментовъ" или "закона площадей":*

первая производная по времени отъ момента количества движенія матеріальной точки относительно какой-либо неподвижной оси равна моменту силы, къ точкѣ приложенной, относительно той же оси *).

Три уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dl_x}{dt} &= L_x, \\ \frac{dl_y}{dt} &= L_y, \\ \frac{dl_z}{dt} &= L_z \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

---

*) *Законъ площадей можетъ быть выраженъ и въ такой формѣ: умноженная на удвоенную массу точки первая производная по времени отъ ея секторіальной скорости въ какой-либо неподвижной плоскости равна моменту силы, къ ней приложенной, относительно оси, проведенной перпендикулярно къ этой плоскости въ вершинѣ секторовъ.*

выражаютъ *законъ моментовъ* относительно трехъ координатныхъ осей или *законъ площадей* въ трехъ координатныхъ плоскостяхъ.

Мы можемъ построить годографъ момента количества движенія точки (l) подобно тому, какъ въ Кинематикѣ мы строили годографъ скорости; скорость точки, вычерчивающей этотъ новый годографъ, будетъ имѣть такія проекціи на координатныя оси:

$$\frac{dl_x}{dt}, \frac{dl_y}{dt}, \frac{dl_z}{dt};$$

поэтому уравненія (6) выражаютъ также слѣдующую теорему: скорость точки, вычерчивающей годографъ момента количества движенія матеріальной точки относительно начала координатъ /или относительно какого-либо неподвижнаго центра/ равна по величинѣ и по направленію моменту силы, къ точкѣ приложенной, относительно того же центра.

Разсмотримъ два важныхъ частныхъ случая:

1) когда моментъ силы, приложенной къ точкѣ, относительно *одной* координатной оси равенъ нулю и

2) когда моментъ силы относительно начала координатъ равенъ нулю, слѣдовательно, когда моменты силъ относительно *трехъ* координатныхъ осей равны нулю.

I случай:

Сила, приложенная къ точкѣ, заключается въ одной плоскости съ неподвижной осью, напримѣръ, съ осью OX, т.е. пересѣкаетъ ее или остается ей параллельною. Въ этомъ случаѣ моментъ силы относительно оси OX равенъ нулю, т.е.

$$L_x = yZ - zY = 0,$$

а тогда законъ площадей даетъ:

$$\frac{dl_x}{dt} = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что моментъ количества движенія относительно оси OX величина постоянная:

$$l_x = C_1 \text{ (пост.)},$$

или

$$m \cdot (yz' - zy') = C_1 \dots\dots\dots\dots (7)$$

Постоянная C_1 можетъ быть опредѣлена, если извѣстны начальное положеніе и начальная скорость точки:

$$C_1 = m(y_0 z_0' - z_0 y_0').$$

Уравненіе (7) представляетъ первый интегралъ дифференціальныхъ уравненій движенія и называется *интеграломъ площадей* въ плоскости YOZ.

На основаніи извѣстной зависимости между моментомъ количества движенія относительно оси OX и секторіальной скоростью въ плоскости YOZ, эта послѣдняя будетъ также величиной постоянной:

$$\sigma_{yz} = \frac{C_1}{2m}.$$

Это уравненіе выражаетъ *законъ сохраненія площадей* въ плоскости YOZ /см.стр.149/.

Если моментъ силы, приложенной къ точкѣ, относительно оси OY равенъ нулю, то законъ площадей имѣетъ мѣсто въ плоскости ZOX.

если

$$L_y = zX - xZ = 0,$$

то

$$\frac{dl_y}{dt} = 0;$$

откуда

$$l_y = C_2 \text{ (пост.)},$$

или

$$m(zx' - xz') = C_2 ;$$

слѣдовательно:

$$\sigma_{zx} = \frac{C_2}{2m}.$$

Если моментъ силы, приложенной къ точкѣ, относительно оси OZ равенъ нулю, то законъ сохраненія площадей имѣетъ мѣсто въ плоскости XOY :

если

$$L_z = xY - yX = 0 ,$$

то

$$\frac{dl_z}{dt} = 0 ;$$

откуда

$$l_z = C_3 \ (пост.),$$

или

$$m(xy' - yx') = C_3 \ (пост.) ;$$

слѣдовательно:

$$\sigma_{xy} = \frac{C_3}{2m}$$

Такъ какъ всякую неподвижную ось можно принять за одну изъ координатныхъ осей, напримѣръ, за ось OZ , а плоскость, ей перпендикулярную, за плоскость XOY, то изъ сказаннаго вытекаетъ слѣдующая *теорема:*

*если моментъ силы, приложенной къ точкѣ, относительно какой-либо неподвижной оси равенъ нулю *), то законъ сохраненія площадей имѣетъ мѣсто въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси, т.е. секторіальная скорость точки въ этой плоскости остается постоянной.*

II случай:

На точку дѣйствуетъ *центральная сила.*

**) Это будетъ тогда, когда сила, во все время движенія точки, находится въ одной плоскости съ осью.*

Если центръ силы примемъ за начало координатъ, то моментъ силы относительно всякой оси, проходящей черезъ начало координатъ, а слѣдовательно, и относительно каждой изъ трехъ координатныхъ осей, будетъ равенъ нулю:

$$L_x = 0\ ,\ L_y = 0\ ,\ L_z = 0\ ;$$

а тогда

$$l_x = C_1,\ l_y = C_2,\ l_z = C_3.$$

Получаемъ, такимъ образомъ, одновременно *три интеграла площадей* въ трехъ координатныхъ плоскостяхъ:

$$\left.\begin{aligned} m(yz' - zy') &= C_1\ , \\ m(zx' - xz') &= C_2\ , \\ m(xy' - yx') &= C_3\ , \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

слѣдовательно, *законъ сохраненія площадей* имѣетъ мѣсто одновременно въ трехъ координатныхъ плоскостяхъ:

$$\sigma_{yz} = \frac{C_1}{2m}\ ,$$

$$\sigma_{zx} = \frac{C_2}{2m}\ ,$$

$$\sigma_{xy} = \frac{C_3}{2m}\ .$$

Моментъ количества движенія l относительно начала координатъ сохраняетъ въ этомъ случаѣ *постоянную величину и направленіе:*

$$l = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}\ ;$$

$$\cos(l, X) = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}}$$

$$\cos(l, y) = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}},$$

$$\cos(l, z) = \frac{C_3}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}}.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ секторіальная скорость точки въ каждой изъ плоскостей, проходящихъ черезъ начало координатъ, имѣетъ постоянную величину, такъ какъ она равна раздѣленной на $2m$ величинѣ проекціи момента количества движенія l на перпендикуляръ къ соотвѣтствующей плоскости; поэтому *законъ сохраненія площадей* имѣетъ мѣсто во *всякой плоскости*, проходящей черезъ начало координатъ; въ каждой такой плоскости существуетъ *и интегралъ площадей*, но когда плоскость не совпадаетъ ни съ одной изъ координатныхъ плоскостей, то соотвѣтствующій интегралъ площадей *будетъ слѣдствіемъ* трехъ интеграловъ въ координатныхъ плоскостяхъ.

Постоянныя C_1, C_2, C_3, опредѣляются съ помощью начальныхъ данныхъ: при $t = t_0$ (t_0 обыкновенно $= 0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $x' = x'_0$, $y' = y'_0$, $z' = z'_0$, а именно:

$$C_1 = m\cdot(y_0 z'_0 - z_0 y'_0),$$
$$C_2 = m\cdot(z_0 x'_0 - x_0 z'_0),$$
$$C_3 = m\cdot(x_0 y'_0 - y_0 x'_0).$$

Умножая уравненія (8) соотвѣтственно на x, y, z, и складывая, получимъ:

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0;$$

отсюда слѣдуетъ, что при дѣйствіи *центральной силы* движеніе точки происходитъ *въ плоскости* ($C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0$), проходящей черезъ начало координатъ (центръ силы) и перпендикулярной къ направленію момента количества движенія l точки относительно

начала координатъ *); въ этой плоскости заключается, конечно, и начальная скорость точки **).

Изъ вышеизложеннаго мы заключаемъ, что *законъ сохраненія площадей* даетъ для дифференціальныхъ уравненій движенія точки: *одинъ первый интегралъ*, если сила, приложенная къ точкѣ, во все время движенія остается въ одной плоскости съ одною изъ координатныхъ осей; и *три первыхъ интеграла* (8), если сила, приложенная къ точкѣ, проходитъ постоянно черезъ начало координатъ.

ГЛАВА V.

Движеніе точки при дѣйствіи центральной силы.

§ 1. *Законы площадей и живой силы.*

На основаніи закона площадей мы знаемъ, что при дѣйствіи центральной силы точка движется въ плоскости, заключающей центръ силы и начальную скорость точки. Если эту плоскость возьмемъ за плоскость xOy, то будемъ имѣть интегралъ площадей:

$$m\cdot(xy'-yx')=C',$$

гдѣ C' величина постоянная:

$$C'=m\cdot(x_0y_0'-y_0x_0')$$

---

*) *Это видно изъ выраженій* cosinus'*овъ угловъ между направленіемъ* l *и координатными осями.*

**) *Въ началѣ главы II было уже указано, что при дѣйствіи центральной силы точка описываетъ плоскую траекторію.*

Если обозначимъ черезъ r и φ полярныя координаты точки въ этой плоскости, тогда будетъ:

$$r^2\varphi' = C, \qquad (1)$$

гдѣ

$$C = \frac{C'}{m}.$$

Законъ живой силы намъ даетъ вообще:

$$d\frac{mv^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz.$$

Въ случаѣ центральной силы F, *какъ бы она ни выражалась*, мы имѣемъ слѣдующія выраженія ея проекцій:

$$X = F\cdot\frac{x}{r},$$

$$Y = F\cdot\frac{y}{r},$$

$$Z = 0,$$

если условимся приписывать величинѣ силы F знакъ $+$, когда сила отталкивательная, и знакъ $-$, когда сила притягательная.

Поэтому элементарная работа будетъ равна:

$$X dx + Y dy + Z dz = F\frac{x dx + y dy}{r} = F\frac{d(x^2+y^2)}{2r} = F\frac{2r dr}{2r} = F dr$$

и законъ живой силы выражается такъ:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F dr \qquad (2)$$

§ 2. *Формула* Binet.

Такъ какъ въ полярныхъ координатахъ:

$$v^2 = r'^2 + r^2\varphi'^2,$$

то уравненіе (2) представится въ видѣ:

$$d\left[\frac{m}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2)\right] = F\cdot dr.$$

Подставляя сюда вмѣсто производной φ' ея значеніе изъ (1):

$$\varphi' = \frac{C}{r^2},$$

получимъ:

$$d\left[\frac{m}{2}\cdot\left(r'^2 + \frac{C^2}{r^2}\right)\right] = F\cdot dr.$$

Выполнимъ дифференцированіе въ лѣвой части:

$$m\cdot\left(r'\cdot dr' - \frac{C^2}{r^3}\,dr\right) = F\cdot dr. \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

За независимую перемѣнную примемъ *уголъ* φ, тогда

$$r' = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\varphi' = \frac{C}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\varphi} = -C\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}.$$

Раздѣлимъ уравненіе (3) на $d\varphi$:

$$m\left(r'\frac{dr'}{d\varphi} - \frac{C^2}{r^3}\cdot\frac{dr}{d\varphi}\right) = F\cdot\frac{dr}{d\varphi}$$

и подставимъ сюда, вмѣсто r' и $\frac{dr'}{d\varphi}$, ихъ значенія:

$$m\left[\frac{C}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\varphi}\cdot\left(-C\cdot\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}\right) - \frac{C^2}{r^3}\cdot\frac{dr}{d\varphi}\right] = F\,\frac{dr}{d\varphi}.$$

Если r не остается постояннымъ, то $\frac{dr}{d\varphi}$ не равно нулю, и, слѣдовательно, можемъ сократить на $\frac{dr}{d\varphi}$; найдемъ:

$$F = -\frac{m\cdot C^2}{r^2}\cdot\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right) \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Уравненіе (4) есть формула Binet, эта формула позволяетъ между прочимъ, весьма просто *по данной траекторіи точки* опредѣлить ту центральную силу, подъ вліяніемъ которой точка совершаетъ движеніе.

Замѣтимъ, что изъ уравненія (3), принимая за независимую перемѣнную *время* t, мы получимъ:

$$m\cdot(r'\cdot r'' - \frac{C^2}{r^3}\cdot r') = F\cdot r';$$

отсюда, по сокращеніи на r', находимъ слѣдующее уравненіе, характеризующее движеніе точки вдоль ея радіуса-вектора:

$$m\cdot(r'' - \frac{C^2}{r^3}) = F,$$

или

$$r'' = \frac{1}{m}\cdot F + \frac{C^2}{r^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

§ 3. *Выводъ закона Ньютона изъ законовъ Кеплера.*

Законы Кеплера, относящіеся къ движенію планетъ, формулируются слѣдующимъ образомъ:

Первый законъ. Каждая планета описываетъ эллипсъ, въ фокусѣ котораго находится солнце.

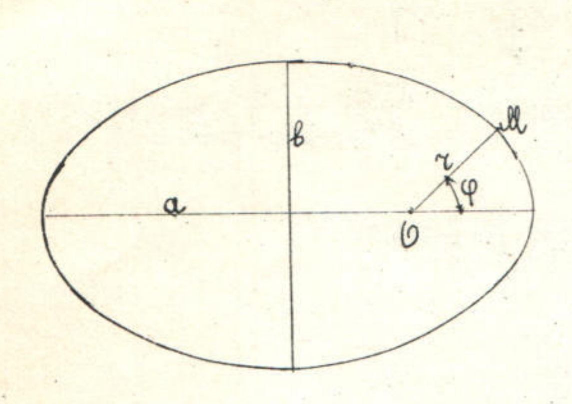
Второй законъ. Площади секторовъ, описываемыхъ радіусомъ-векторомъ планеты, пропорціональны времени.

Третій законъ. Квадраты временъ обращенія планетъ вокругъ солнца пропорціональны кубамъ большихъ полуосей, описываемыхъ ими эллипсовъ.

Обозначимъ радіусъ-векторъ планеты черезъ r (черт. 54), уголъ, образуемый радіусомъ-векторомъ съ большою осью, черезъ φ полуоси эллипса - большую черезъ a, малую черезъ b; наконецъ, время обращенія планеты вокругъ солнца черезъ T.

На основанiи перваго закона Кеплера

$$r = \frac{p}{1 + e.\cos\varphi},$$



Чертежъ 54.

если за полярную ось возьмемъ большую ось эллипса, а за полюсъ - фокусъ.

На основанiи второго закона Кеплера секторiальная скорость величина постоянная, слѣдовательно:

$$r^2.\varphi' = C \text{(пост.)}.$$

Наконецъ, третiй законъ Кеплера даетъ намъ слѣдующую зависимость для всѣхъ планетъ:

$$\frac{T^2}{a^3} = \delta,$$

гдѣ δ есть величина постоянная, одинаковая для всѣхъ планетъ.

Выведемъ изъ законовъ Кеплера законъ Ньютона. Такъ какъ

$$r^2.\varphi' = C,$$

(II законъ Кеплера), то моментъ силы F относительно полюса O равенъ нулю, значитъ F есть *сила центральная,* проходящая черезъ солнце.

Силу эту мы можемъ опредѣлить, пользуясь формулою Binet, такъ какъ знаемъ (I законъ Кеплера) траекторiю планеты.

Изъ уравненiя эллипса имѣемъ:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\cdot(1 + e.\cos\varphi),$$

откуда

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} = -\frac{e}{p}\cdot\sin\varphi.$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} = -\frac{e}{p}\cos\varphi .$$

Подставляя выраженія производной $\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}$ и $\frac{1}{r}$ въ формулу Binet, получимъ.

$$F = -\frac{m \cdot C^2}{r^2}\left(-\frac{e}{p}\cos\varphi + \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\varphi\right) .$$

или

$$F = -\frac{m \cdot C^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} .$$

Такимъ образомъ, исходя изъ первыхъ двухъ законовъ Кеплера, мы нашли, что интересующая насъ сила F пропорціональна массѣ, обратно пропорціональна квадрату разстоянія, и что эта сила притягательная (послѣднее показываетъ знакъ минусъ въ выраженіи силы F).

Разсмотримъ коэффиціентъ $\frac{C^2}{p}$

Хотя входящія въ него величины: удвоенная секторіальная скорость C и параметръ p для различныхъ планетъ различны, тѣмъ не менѣе, основываясь на третьемъ законѣ Кеплера, можно доказать, что отношеніе $\frac{C^2}{p}$ величина *одинаковая* для всѣхъ планетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, секторіальная скорость планеты = $\frac{1}{2}C$, а площадь эллипса = $\pi a b$, слѣдовательно:

$$\frac{1}{2}C = \frac{\pi a b}{T} ;$$

откуда

$$C^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} .$$

Подставляя сюда вмѣсто малой полуоси ея выраженіе черезъ большую полуось и параметръ: $b^2 = ap$, получимъ.

$$C^2 = \frac{4\pi^2 a^3 p}{T^2} ;$$

откуда

$$\frac{c^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2};$$

но по третьему закону Кеплера

$$\frac{T^2}{a^3} = \delta;$$

поэтому

$$\frac{c^2}{p} = \frac{4\pi^2}{\delta} = k.$$

гдѣ k постоянная величина, одинаковая для всѣхъ планетъ и, слѣдовательно, дѣйствующая сила (сила притяженія къ солнцу) будетъ.

$$F = \frac{km}{r^2} \dots\dots\dots\dots (6)$$

Постоянная k есть величина той силы притяженія, которую оказываетъ солнце на единицу массы, когда она находится на единицѣ разстоянія.

§ 4. *Опредѣленіе движенія планетъ и кометъ подъ вліяніемъ притяженія къ солнцу.*

Въ механикѣ планеты и кометы, когда изучается только движеніе ихъ вокругъ солнца, разсматриваются какъ матеріальныя точки; поэтому наша задача состоитъ въ слѣдующемъ опредѣлить движеніе матеріальной точки подъ вліяніемъ центральной притягательной силы, пропорціональной массѣ и обратно пропорціональной квадрату разстоянія точки отъ центра силы

Если центральную силу обозначимъ черезъ F, массу точки черезъ m, величину силы притяженія единицы массы на единицѣ разстоянія черезъ k, то величина силы будетъ

$$F = -\frac{k.m}{r^2}.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ нѣтъ надобности опредѣлять движеніе по общему пріему, т.е. составлять сначала дифференціальныя уравненія движенія, такъ какъ здѣсь имѣютъ мѣсто и законъ сохраненія живой силы и законъ сохраненія площадей, слѣдовательно, могутъ быть написаны два интеграла: *интегралъ живой силы и интегралъ площадей.*

Сила F, какъ сила центральная и зависящая только отъ разстоянія, имѣетъ потенціалъ, и силовая функція для нея будетъ:

$$U = \int \frac{k.m}{r^2} dr = \frac{k.m}{r} ;$$

слѣдовательно, интегралъ живой силы выразится уравненіемъ

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{k.m}{r} + h_1 ,$$

гдѣ h_1 постоянная произвольная. Помножимъ обѣ части равенства на $\frac{2}{m}$, получимъ:

$$v^2 = \frac{2k}{r} + h , \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

гдѣ $h = \frac{2h_1}{m}$.

Интегралъ площадей выразится такъ:

$$r^2\varphi' = C \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Постоянныя произвольныя h и C мы опредѣлимъ съ помощью *начальнаго положенія* и *начальной скорости* точки, т.е. зная, что въ моментъ $t_0 = 0$, $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$ (черт. 55) (ничто намъ не мѣшаетъ считать $\varphi_0 = 0$); и, кромѣ того, $v = v_0$ и $(\widehat{v_0, r_0}) = \delta$ или $r' = r'_0$ и $\varphi' = \varphi'_0$.

Подставляя начальныя значенія въ уравненія (7) и (8), получимъ:

$$h = v_0^2 - \frac{2k}{r_0},$$

$$C = r_0^2 \cdot \varphi_0'$$

или, такъ какъ

$$r^2 \varphi' = r r \varphi' = r v \cdot \sin(v, r),$$

то

$$C = r_0 v_0 \sin(\widehat{v_0, r_0}) = r_0 v_0 \cdot \sin\delta .$$

Считая h и C величинами извѣстными, *опредѣлимъ траекторію движущейся точки*, т.е. найдемъ зависимость между r и φ.

На основаніи уравненія (7), выражая квадратъ скорости въ полярныхъ координатахъ, получимъ:

$$r'^2 + r^2 \varphi'^2 = \frac{2k}{r} + h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7')$$

Очевидно:

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \varphi'$$

но изъ уравненія (6) имѣемъ:

$$\varphi' = \frac{C}{r^2};$$

слѣдовательно:

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{C}{r^2}.$$

Подставляя въ уравненіе (7') вмѣсто r' и φ' ихъ значенія, получимъ:

$$\frac{C^2}{r^4} \cdot \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = \frac{2k}{r} + h ..$$

Чертежъ 55.

Отсюда имѣемъ:

$$\frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2k}{r} + h - \frac{C^2}{r^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Изслѣдуемъ вопросъ о томъ, какой *знакъ* надо брать передъ радикаломъ.

Мы всегда можемъ отсчитывать уголъ φ въ такую сторону, чтобы было $\varphi_0 > 0$, тогда $C > 0$. Такъ какъ $C > 0$, то знакъ лѣвой части уравненія (8) опредѣляется знакомъ $\frac{dr}{d\varphi}$, но

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r'}{\varphi'} = \frac{r^2}{C} r',$$

откуда слѣдуетъ, что знакъ $\frac{dr}{d\varphi}$ въ свою очередь опредѣляется знакомъ производной r', которая можетъ быть положительной, отрицательной или равной нулю.

Очевидно, если $r_0' > 0$, то передъ корнемъ мы должны взять знакъ $+$ если $r_0' < 0$, то знакъ минусъ. Если же $r_0' = 0$ (это будетъ тогда, когда $v_0 \perp r_0$), то о знакѣ передъ радикаломъ мы должны судить по знаку второй производной отъ r въ начальный моментъ.

Мы видѣли, что

$$r'' = -\frac{k}{r^2} + \frac{C^2}{r^3},$$

слѣдовательно, если

$$-\frac{k}{r_0^2} + \frac{C^2}{r_0^3} > 0,$$

то беремъ передъ корнемъ знакъ плюсъ; если

$$-\frac{k}{r_0^2} + \frac{C^2}{r_0^3} < 0,$$

то знакъ минусъ. Если же

$$-\frac{k}{r_0^2} + \frac{C^2}{r_0^3} = 0,$$

тогда всѣ производныя отъ r по времени въ начальный моментъ будутъ равны нулю*); принимая во вниманіе разложеніе r въ

---

*) *Дѣйствительно, изъ выраженія для r'' найдемъ, что*

$$r_0''' = f(r_0) \cdot r_0',$$

гдѣ

$$f(r_0) = \frac{2k}{r_0^3} - \frac{3C^2}{r_0^4};$$

рядъ:

$$r = r_0 + r_0'(t-t_0) + \frac{1}{2} r_0''(t-t_0)^2 + \frac{1}{6} r'''(t-t_0)^3 + \ldots$$

мы можемъ утверждать, что r во все время будетъ оставаться постояннымъ, т.е. равнымъ r_0; въ этомъ случаѣ точка описываетъ окружность.

Положимъ, что, руководствуясь указанными соображеніями, мы выбрали въ нашемъ случаѣ знакъ + , тогда изъ уравненія (8) получаемъ:

$$\frac{C.dr}{r^2 \sqrt{\frac{2k}{r} + h - \frac{C^2}{r^2}}} = d\varphi .$$

Возьмемъ интегралъ отъ обѣихъ частей этого равенства:

$$\int \frac{C.dr}{r^2 \sqrt{\frac{2k}{r} + h - \frac{C^2}{r^2}}} = \varphi - \alpha , \qquad (8'')$$

гдѣ α - постоянная произвольная, опредѣляемая по начальнымъ даннымъ.

Обозначимъ

$$\frac{1}{r} = u ;$$

тогда уравненіе (8'') имѣетъ видъ:

$$-\int \frac{C.du}{\sqrt{2k.u + h - C^2.u^2}} = \varphi - \alpha .$$

но

$$r_0' = 0 ,$$

слѣдовательно, и

$$r_0''' = 0 ;$$

точно также всѣ производныя послѣдующихъ высшихъ порядковъ въ начальный моментъ будутъ равны нулю, такъ какъ онѣ выражаются въ видѣ суммы произведеній, изъ которыхъ каждое содержитъ множителемъ производныя предшествующихъ низшихъ порядковъ

Подрадикальную функцію перепишемъ слѣдующимъ образомъ:

$$2ku+h-C^2u^2=h+\frac{k^2}{C^2}-\left(C^2u^2-2ku+\frac{k^2}{C^2}\right)=$$

$$=h+\frac{k^2}{C^2}-\left(C.u-\frac{k}{C}\right)^2;$$

тогда

$$\int\frac{C.du}{\sqrt{h+\frac{k^2}{C^2}-\left(C.u-\frac{k}{C}\right)^2}}=\varphi-\alpha;$$

выполнивъ интегрированіе находимъ

$$\arccos\frac{C.u-\frac{k}{C}}{\sqrt{h+\frac{k^2}{C^2}}}=\varphi-\alpha;$$

откуда

$$Cu-\frac{k}{C}=\sqrt{h+\frac{k^2}{C^2}}\cdot\cos(\varphi-\alpha).$$

и

$$u=\frac{k}{C^2}+\frac{1}{C}\sqrt{h+\frac{k^2}{C^2}}\cdot\cos(\varphi-\alpha).$$

Введемъ обозначенія:

$$\frac{C}{k}=p,$$

и

$$\left(\frac{1}{C}\sqrt{h+\frac{k^2}{C^2}}\right)\cdot\frac{C^2}{k}=e,$$

или проще

$$e=\sqrt{1+\frac{h.C^2}{k^2}}$$

Тогда имѣемъ:

$$\frac{1}{r}=u=\frac{1}{p}\left[1+e.\cos(\varphi-\alpha)\right]$$

и окончательный видъ уравненія траекторіи будетъ:

$$r=\frac{p}{1+e.\cos(\varphi-\alpha)}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(9)$$

Если бы передъ радикаломъ въ уравненіи (8) пришлось бы

взять знакъ − , то этотъ минусъ мы могли бы перенести въ правую часть равенства и тогда послѣ интегрированія мы получили бы $(-\varphi)$, вмѣсто φ. Беря при этомъ постоянную произвольную $+\alpha$ получимъ тоже уравненіе (9)

$$r = \frac{p}{1 + e.\cos(-\varphi + \alpha_1)} = \frac{p}{1 + e.\cos(\varphi - \alpha_1)}$$

Траекторія точки, выражаемая уравненіемъ (9), есть *эллипсъ,* когда $e<1$, *парабола,* когда $e=1$, *гипербола,* когда $e>1$.

Величина e зависитъ отъ знака передъ h; $e<1$, когда $h<0$, но

$$h = v_0^2 - \frac{2k}{r_0} \quad ;$$

значитъ точка описываетъ эллипсъ, когда

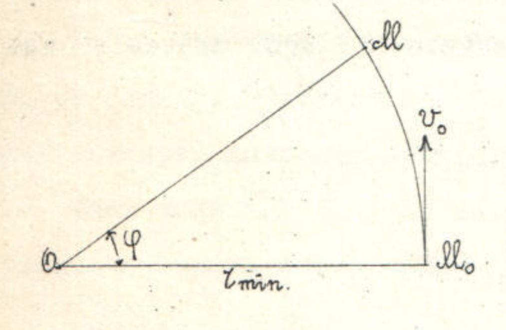
$$v_0^2 < \frac{2k}{r_0} \; ,$$

т.е. когда

$$v_0 < \sqrt{\frac{2k}{r_0}} \; ;$$

точка описываетъ параболу, когда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{r_0}}$$



Чертежъ 56.

и гиперболу, когда

$$v_0 > \sqrt{\frac{2k}{r_0}}$$

Такимъ образомъ, все различіе траекторій обусловливается величиною скорости точки въ начальный моментъ.

Планеты движутся по эллипсамъ, кометы большею частью по параболамъ; изъ интеграла живой силы

$$v^2 = \frac{2k}{r} + h$$

ясно, что во всякомъ положеніи планеты скорость $v < \sqrt{\frac{2k}{r}}$; во всякомъ положеніи кометы, описывающей параболу, $v = \sqrt{\frac{2k}{r}}$.

Изъ формулы (9) легко видѣть, что r получаетъ наименьшее значеніе, когда $\varphi = \alpha$, значитъ α есть то значеніе φ, которое соотвѣтствуетъ наименьшему разстоянію движущейся точки отъ притягивающаго центра*).

Если будемъ отсчитывать φ отъ наименьшаго радіуса-вектора OM (черт.56), то $\alpha = 0$, и уравненіе траекторіи будетъ:

$$r = \frac{p}{1 + e.\cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Перейдемъ къ *опредѣленію того закона, по которому точка движется по найденной уже траекторіи.*

Законъ этотъ можно опредѣлить двоякимъ способомъ, выразивъ или r, или φ, какъ функцію отъ времени.

Мы найдемъ выраженіе угла φ, какъ функцію отъ времени.

Подставляя въ уравненіе (8) вмѣсто r его значеніе изъ уравненія (9), получимъ:

$$\frac{p^2}{(1+e.\cos\varphi)^2}\varphi' = C,$$

или

$$\frac{p^2.d\varphi}{(1+e.\cos\varphi)^2} = C.dt.$$

Возьмемъ интегралы отъ обѣихъ частей равенства

$$\int\frac{p^2.d\varphi}{(1+e.\cos\varphi)^2} = C.(t-\tau),$$

гдѣ τ - постоянная произвольная.

Интегралъ лѣвой части находится просто, когда траекторія точки *парабола*; тогда онъ равенъ:

---

*) *Ближайшее къ солнцу положеніе планеты или кометы называется "перигелій".*

$$p^2\int\frac{d\varphi}{(1+e.\cos\varphi)^2}=p^2\int\frac{d\varphi}{4.\cos^4\frac{\varphi}{2}}=\frac{p^2}{2}\int\frac{\frac{d\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{p^2}{2}\int(1+tg^2\frac{\varphi}{2})\cdot d\,tg\frac{\varphi}{2}=$$

$$=\frac{p^2}{2}(tg\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{3}tg^3\frac{\varphi}{2}) .$$

Такимъ образомъ, искомая зависимость выражается формулой:

$$\frac{p^2}{2}\cdot(tg\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{3}\cdot tg^3\frac{\varphi}{2})=C.(t-\tau), \quad \ldots \quad (10)$$

гдѣ

$$\frac{2.C}{p^2}=\frac{2\sqrt{k}}{p^{3/2}}$$

Изъ этого уравненія слѣдуетъ, что когда $r^2.\varphi'=C$, т.е. когда точка M находится ближе всего къ притягивающему центру, то

$$t=\tau ,$$

значитъ, τ есть время прохожденія кометы черезъ перигелій.

Когда траекторія точки *эллипсъ или гипербола,* интегрированіе сложнѣе. Однако, для эллипса можно найти законъ движенія другимъ, довольно простымъ путемъ.

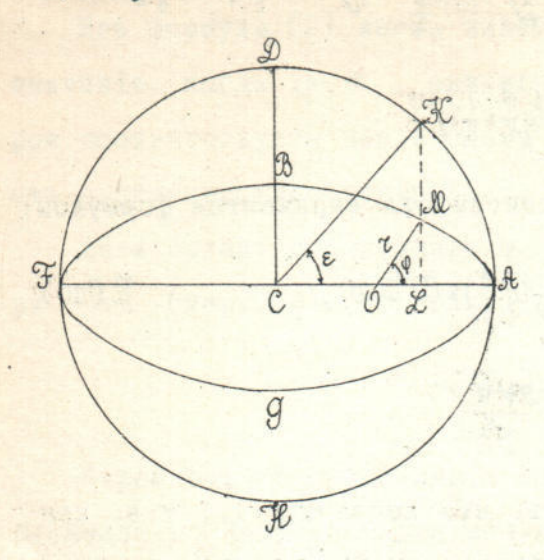
Такъ какъ $r^2.\varphi=C$, то площадь сектора, описываемаго радіусомъ-векторомъ точки, будетъ

$$S=\frac{C}{2}(t-\tau), \quad \ldots \quad (11)$$

гдѣ τ есть время прохожденія планеты черезъ перигелій. Площадь S въ уравненіи (11) выражена въ функціи отъ времени, поэтому, если мы сумѣемъ найти зависимость между S и φ, то задача наша будетъ рѣшена.

Мы увидимъ, что вмѣсто угла φ намъ будетъ удобно ввести другой уголъ ε, получаемый слѣдующимъ построеніемъ: опишемъ изъ центра эллипса C (черт.57) радіусомъ, равнымъ большой полуоси, окружность ADF и черезъ точку M проведемъ прямую $ML \perp CA$ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ K соеди-

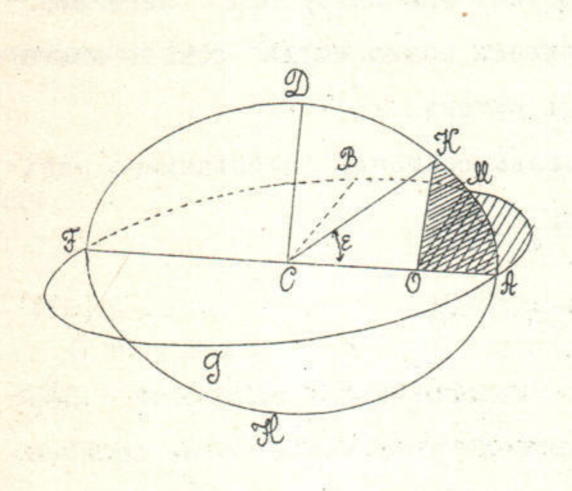
няя точку K съ C, получимъ уголъ KCA, который и обозначимъ буквою ε.



Чертежъ 57.

Уголъ φ называется *истинною аномаліею,* а уголъ ε *эксцентрическою аномаліею.*

Будемъ разсматривать эллипсъ $ABFG$, какъ проекцію построеннаго нами круга $ADFH$, (діаметръ котораго равенъ большой оси эллипса), предполагая, что кругъ повернутъ около діаметра (черт.58) AF такъ, что проекція радіуса CD (перпендикулярнаго къ діаметру AF) этой окружности на плоскость эллипса совпадаетъ съ малой полуосью эллипса CB.



Чертежъ 58.

Точка M будетъ тогда проекціей точки окружности K.

Выразимъ площадь сектора $S = \text{пл.} AOM$ не въ функціи отъ угла φ, а въ функціи отъ угла ε. Очевидно, секторъ $S = \text{пл.} AOM$ представляетъ проекцію сектора AOK на плоскость эллипса.

Площадь сектора AOK равна:

$$\text{пл.} ACK - \text{пл.} OCK = \frac{1}{2} a^2 \varepsilon - \frac{1}{2} a \cdot ae \cdot \sin\varepsilon ,$$

ибо $OC = a.e$. Помножимъ эту площадь на cosinus угла BCD (между плоскостями окружности и эллипса), равный отношенію $\frac{b}{a}$ получимъ:

$$S = \text{пл.}\, AOM = \frac{a^2}{2}\cdot(\varepsilon - e.\sin\varepsilon)\frac{b}{a} = \frac{ab}{2}\cdot(\varepsilon - e.\sin\varepsilon).$$

На основаніи уравненія (11)

$$\frac{ab}{2}\cdot(\varepsilon - e.\sin\varepsilon) = \frac{C}{2}\cdot(t-\tau),$$

откуда

$$\varepsilon - e.\sin\varepsilon = \frac{C}{ab}(t-\tau).$$

Такъ какъ

$$b^2 = ap,$$

то

$$\frac{C}{ab} = \frac{C}{a^{3/2}\sqrt{p}},$$

но у насъ

$$\sqrt{p} = \frac{C}{\sqrt{k}};$$

слѣдовательно:

$$\frac{C}{ab} = \frac{\sqrt{k}}{a^{3/2}}$$

и искомая зависимость выразится формулой:

$$\varepsilon - e\sin\varepsilon = \frac{\sqrt{k}}{a^{3/2}}(t-\tau). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Нетрудно найти зависимость между углами ε и φ изъ чертежа (57):

$$KL = \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$ML = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

слѣдовательно:

$$KL = \frac{a}{b}\cdot ML;$$

но

$$KL = a\sin\varepsilon,$$

$$ML = r\sin\varphi = \frac{p\sin\varphi}{1+e\cos\varphi},$$

слѣдовательно

$$\sin\varepsilon = \frac{p}{b}\cdot\frac{\sin\varphi}{1+e\cos\varphi} = \frac{b}{a}\cdot\frac{\sin\varphi}{1+e\cos\varphi}$$

Для случая гиперболы, какъ менѣе важнаго, мы не будемъ искать выраженія угла φ въ функціи отъ времени.

Разсмотрѣнная въ настоящемъ параграфѣ задача можетъ служить *примѣромъ* для рѣшенія всякой задачи, въ которой требуется опредѣлить движеніе матеріальной точки подъ вліяніемъ центральной силы, выражающейся *нѣкоторою функціею разстоянія*.

Планъ рѣшенія слѣдующій: 1) составленіе двухъ интеграловъ живой силы и площадей, 2) опредѣленіе постоянныхъ произвольныхъ въ этихъ интегралахъ по начальнымъ даннымъ, 3) опредѣленіе траекторіи точки, 4) опредѣленіе закона движенія точки по траекторіи, т.е. выраженіе одной изъ координатъ точки: r или φ въ функціи отъ времени.

ГЛАВА VI.

ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ ПО ПОВЕРХНОСТИ.

§ 1. *Условія для скорости и ускоренія точки.*

Всякая неподвижная поверхность выражается уравненіемъ вида:

$$f(x,y,z)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

связывающимъ координаты точки.

Поверхность, по которой движется точка, можетъ быть или

реальная, напримѣръ, поверхность шара, или только воображаемая, *геометрическая;* - такъ напримѣръ, точка M, соединенная съ неподвижною точкою O посредствомъ стержня длины l, движется по геометрической поверхности шара радіуса l *).

Скорость и ускореніе точки, движущейся по данной поверхности, подчинены нѣкоторымъ условіямъ.

Чтобы вывести эти условія, замѣтимъ, что уравненіе поверхности (1) обратится въ тождество, если мы вмѣсто координатъ точки подставимъ ихъ выраженія въ функціяхъ времени; а если функція тождественно равна нулю, то и всѣ ея производныя по времени равны нулю:

$$\frac{df}{dt}=0\,;\ \frac{d^2f}{dt^2}=0\,;\ \ldots\ldots \qquad \text{и т.д.}$$

Раскрывая первую производную, получимъ условіе, которому должны удовлетворять проекціи скорости точки, движущейся по поверхности:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z'=0 \qquad (2)$$

Этому условію легко придать простую геометрическую форму. Проведемъ въ точкѣ M къ поверхности (черт.59) нормаль MN, одно направленіе которой считается положительнымъ, другое отрицательнымъ. Cosinus'ы угловъ, образуемыхъ нормалью съ осями координатъ, будутъ:

$$\cos(N,X)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f}\,,$$

$$\cos(N,Y)=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f}\,,$$

----

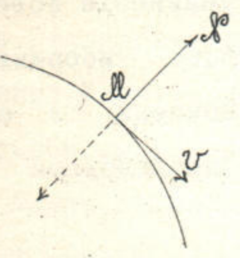
*) *Поверхность, наз. "удерживающею", если точка не можетъ съ нея сойти, и "неудерживающею", если точка можетъ сойти въ одну сторону.*

$$\cos(\mathcal{N}, Z) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta f},$$

гдѣ

$$\Delta f = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2};$$

причемъ положительному направленію нормали соотвѣтствуетъ корень со знакомъ плюсъ, а отрицательному со знакомъ минусъ.



Чертежъ 59.

Раздѣляя обѣ части уравненія (2) на Δf, получимъ:

$$x'\cos(\mathcal{N}, X) + y'\cos(\mathcal{N}, Y) + z'\cos(\mathcal{N}, Z) = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что проекція скорости на направленіе нормали равна нулю:

$$v\cos(v, \mathcal{N}) = 0. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Значитъ, или $v = 0$, но тогда точка находится въ покоѣ или, если точка движется, то

$$\cos(v, \mathcal{N}) = 0,$$

т.е.

$$\angle(v, \mathcal{N}) = 90°,$$

или

$$v \perp \mathcal{N}.$$

Такимъ образомъ, условіе (2) выражаетъ только то, что скорость точки, движущейся по поверхности, перпендикулярна къ нормали, т.е. направлена въ плоскости, касательной къ поверхности, что очевидно.

Раскрывая вторую производную: $\frac{d^2 f}{dt^2}$, получимъ условіе, которому должны удовлетворять проекціи ускоренія:

$$f^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial x}x'' + \frac{\partial f}{\partial y}y'' + \frac{\partial f}{\partial z}z'' = 0, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

гдѣ $f^{(2)}$ есть функція второй степени относительно проекцій

скорости и представляетъ краткое обозначеніе совокупности остальныхъ членовъ выраженія второй производной, такъ что

$$f^{(2)}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot x'^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot y'^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot z'^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot x'y'+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\cdot y'z'+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\cdot z'x'.$$

Если обѣ части уравненія (4) раздѣлимъ на Δf, то получимъ условіе для ускоренія въ болѣе простой формѣ:

$$x''\cos(\mathcal{X},X)+y''\cos(\mathcal{X},Y)+z''\cos(\mathcal{X},Z)=-\frac{f^{(2)}}{\Delta f},$$

откуда

$$v\cdot\cos(v,\mathcal{X})=-\frac{f^{(2)}}{\Delta f}\qquad\qquad(5)$$

§ 2. *Реакція поверхности и дифференціальныя уравненія движенія точки.*

Реальная поверхность можетъ быть *гладкая* или *негладкая*. Разсмотримъ прежде всего случай гладкой поверхности; это будетъ также случай той поверхности, которую мы въ предыдущемъ параграфѣ назвали геометрической.

Въ статикѣ нами установленъ принципъ, въ силу котораго присутствіе опоръ, стѣсняющихъ свободу тѣла, всегда можетъ быть замѣнено присоединеніемъ къ даннымъ силамъ, дѣйствующимъ на тѣло, нѣкоторыхъ новыхъ силъ, названныхъ реакціями опоръ.

Когда точка движется по гладкой поверхности, то эта поверхность представляетъ опору, *реакція* которой направлена по нормали къ поверхности. Если величину реакціи обозначимъ черезъ R, условившись приписывать ей знакъ +, когда она направлена по положительной нормали, и знакъ −, когда она направлена по отрицательной нормали, то можемъ выразить проекціи реакціи на координатныя оси слѣдующимъ образомъ:

$$\mathcal{R}.\cos(\mathcal{R},X)=\mathcal{R}.\cos(\mathcal{N},X)=\frac{\mathcal{R}}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\mathcal{R}.\cos(\mathcal{R},Y)=\mathcal{R}.\cos(\mathcal{N},Y)=\frac{\mathcal{R}}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\mathcal{R}.\cos(\mathcal{R},Z)=\mathcal{R}.\cos(\mathcal{N},Z)=\frac{\mathcal{R}}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z},$$

гдѣ

$$\Delta f=+\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Такъ какъ ускоренiе точки, умноженное на массу, должно быть и по величинѣ и по направленiю равно равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло, сложенной съ реакцiей поверхности, то дифференцiальныя уравненiя движенiя точки по гладкой поверхности $f(x, y, z)=0$ будутъ:

$$\left.\begin{aligned} mx''&=X+\frac{\mathcal{R}}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x},\\ my''&=Y+\frac{\mathcal{R}}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y},\\ mz''&=Z+\frac{\mathcal{R}}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z},\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(6)$$

гдѣ X, Y, Z суть проекцiи равнодѣйствующей приложенныхъ къ тѣлу заданныхъ силъ на координатныя оси *).

Найденныя уравненiя (6) вмѣстѣ съ уравненiемъ (1) позво-

---

*) *Необходимость появленiя вторыхъ членовъ въ правыхъ частяхъ уравненiй (6) вытекаетъ уже изъ того, что проекцiи ускоренiя движущейся точки должны удовлетворять уравненiю (4), слѣдовательно, если бы не было этихъ вторыхъ членовъ, то и проекцiи данной силы* X, Y, Z *должны были бы удовлетворять соотвѣтствующему условiю, что, вообще говоря, невозможно, такъ какъ проекцiи данной силы могутъ быть заданы какъ угодно.*

ляютъ намъ рѣшить двѣ задачи, которыя здѣсь представляются: 1) опредѣлить движенiе точки по поверхности, 2) опредѣлить реакцiю поверхности.

Въ первой задачѣ нужно найти координаты x, y, z въ функцiи времени, во второй задачѣ величину R, для опредѣленiя этихъ четырехъ неизвѣстныхъ послужатъ намъ имѣющiяся у насъ четыре уравненiя три дифференцiальныхъ уравненiя (6) и уравненiе поверхности (1).

Общiй методъ для опредѣленiя движенiя точки по поверхности состоитъ въ слѣдующемъ: исключая реакцiю R изъ уравненiй (6) получимъ два уравненiя:

$$\frac{mx - X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{my'' - Y}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

$$\frac{mx'' - X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{mz'' - Z}{\frac{\partial f}{\partial z}};$$

затѣмъ, пользуясь уравненiемъ поверхности, одну изъ координатъ выражаемъ черезъ двѣ другiя, напримѣръ, z черезъ x и y, и полученныя выраженiя подставляемъ въ два вышенаписанныя уравненiя, - получаемъ два дифференцiальныхъ уравненiя второго порядка, находимъ далѣе четыре интеграла этихъ уравненiй, при чемъ войдутъ четыре постоянныхъ произвольныхъ; значенiя этихъ постоянныхъ опредѣлимъ, зная начальныя данныя: x, y_0, x'_0, y'_0, найдя координаты x и y какъ функцiи отъ времени t, легко уже получимъ и z.

Какъ и въ случаѣ свободной точки, большую пользу намъ здѣсь приносятъ законъ живой силы и законъ сохраненiя площадей.

§ 3. *Интегралы живой силы и площадей.*

Примѣнимъ *законъ живой силы* къ движенію точки по поверхности:

$$d\frac{mv^2}{2} = F_1 . ds . \cos(F, v),$$

гдѣ F_1 равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ (равнодѣйствующая этихъ силъ F) и реакціи R.

Знаемъ, что работа этой равнодѣйствующей:

$$F_1 \cos(F_1, v) = F.ds.\cos(F, v) + R.ds.\cos(R, v);$$

но такъ какъ реакція направлена по нормали, а скорость точки перпендикулярна къ нормали, то $\cos(R, v) = 0$ и слѣдовательно, элементарная работа реакціи поверхности равна нулю. Значитъ уравненіе, выражающее безконечно-малое приращеніе живой силы для точки, движущейся по гладкой поверхности, будетъ совершенно такое же, какъ и для точки свободной:

$$d\frac{mv^2}{2} = F.ds.\cos(F, v);$$

отсюда, если данныя силы имѣютъ потенціалъ, тогда элементарная работа равна дифференціалу силовой функціи U:

$$F.ds.\cos(F, v) = X.dx + Y.dy + Z.dz = dU,$$

и *интегралъ живой силы* будетъ:

$$\frac{mv^2}{2} - U = h \quad \dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

Такимъ образомъ, если данныя силы, приложенныя къ точкѣ, движущейся по гладкой поверхности, имѣютъ потенціалъ, то существуетъ интегралъ живой силы, который выражаетъ законъ со-

храненія полной энергіи точки, постоянная

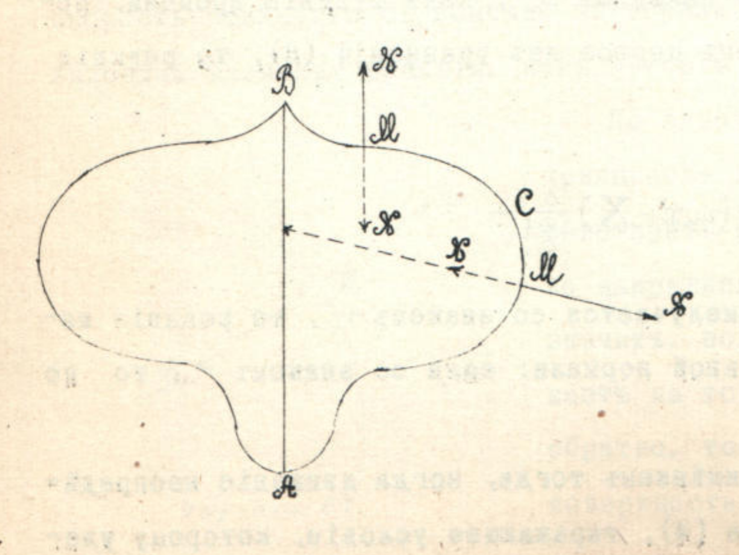
$$h = \frac{m.v_0^2}{2} - U(x_0, y_0, z_0).$$

Законъ площадей даетъ намъ интегралъ тогда, когда моментъ равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, относительно нѣкоторой оси равенъ нулю, это имѣетъ мѣсто, если упомянутая равнодѣйствующая будетъ все время параллельна нѣкоторой оси или будетъ ее пересѣкать.

Разсматривая движеніе точки по поверхности, мы должны имѣть въ виду равнодѣйствующую данныхъ силъ и реакціи, слѣдовательно, сумму моментовъ данныхъ силъ и реакціи.

Существуетъ одинъ важный случай, гдѣ напередъ можно сказать, что моментъ реакціи относительно нѣкоторой оси равенъ нулю. Такой случай представляется тогда, когда данная поверхность есть *поверхность вращенія*, т.е. поверхность, полученная вращеніемъ нѣкоторой плоской кривой $\mathcal{ACB}$ вокругъ оси $\mathcal{AB}$ (черт.60), лежащей въ ея плоскости. Нормаль къ поверхности вращенія, а слѣдовательно, и направленная по ней реакція, всегда или пересѣкаетъ ось поверхности или ей параллельна.

Въ томъ и другомъ случаѣ моментъ реакціи относительно оси вращенія равенъ нулю. Если для точки, движущейся по поверхности вращенія, данная сила, къ ней приложенная, будетъ или пересѣкать ось поверхности, или будетъ ей параллельна, тогда



Чертежъ 60.

и моментъ данной силы относительно этой оси равенъ нулю

Такимъ образомъ, если точка движется по гладкой поверхности вращенія, то существуетъ интегралъ площадей въ плоскости, перпендикулярной къ оси поверхности, если только данная сила все время находится въ одной плоскости съ этой осью

Примемъ ось поверхности AB за ось Oz, тогда плоскость перпендикулярная къ ней, будетъ XOY, и интегралъ площадей выразится такъ

$$xy' - yx' = const.,$$

или въ полярныхъ координатахъ

$$r^2\varphi' = const.$$

§ 4. *Опредѣленіе реакціи или давленія.*

Для опредѣленія реакціи существуетъ два способа.

Первый способъ примѣняется тогда, когда движеніе точки опредѣлено, т.е. когда x, y, z мы уже выразили въ функціяхъ отъ времени t. Беремъ одно изъ дифференціальныхъ уравненій (6), содержащее R, подставляемъ въ него, вмѣсто координатъ, найденныя выраженія и находимъ R_1, какъ функцію времени. Если, напримѣръ, возьмемъ первое изъ уравненій (6), то реакція будетъ:

$$R = (m.x'' - X)\frac{\Delta f}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Если величина R получается со знакомъ $+$, то реакція направлена по положительной нормали; если со знакомъ $-$, то по отрицательной.

Второй способъ примѣняемъ тогда, когда движеніе неопредѣлено. Беремъ уравненіе (4), выражающее условіе, которому удо-

влетворяютъ проекціи ускоренія точки. подставляя въ это уравненіе вмѣсто вторыхъ производныхъ ихъ выраженія изъ уравненій (6), получимъ:

$$\frac{1}{m}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}X+\frac{\partial f}{\partial y}Y+\frac{\partial f}{\partial z}Z\right\}+\frac{R}{m\Delta f}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right\}+f^{(2)}=0.$$

Принимая во вниманіе, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2=(\Delta f)^2,$$

находимъ реакцію, выраженную черезъ координаты и скорость:

$$R=-\frac{1}{\Delta f}\left(\frac{\partial f}{\partial x}X+\frac{\partial f}{\partial y}Y+\frac{\partial f}{\partial z}Z\right)-\frac{mf^{(2)}}{\Delta f}$$

или

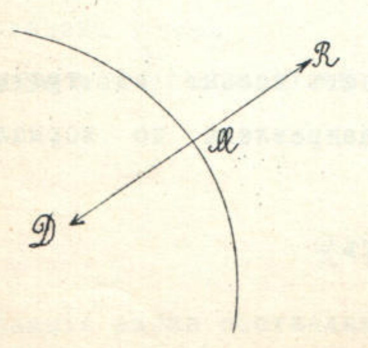
$$R=-F\cos(F,N)-\frac{mf^{(2)}}{\Delta f}$$

и

$$\Delta f=+\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

гдѣ N направленіе положительной нормали. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ изъ полученнаго такимъ образомъ выраженія R удается скорость исключить съ помощью интеграла живой силы, и тогда находимъ величину реакціи, какъ функцію отъ координатъ точки.

По одному изъ принятыхъ нами принциповъ всякому дѣйствію соотвѣтствуетъ равное и противоположно направленное противодѣйствіе, значитъ, если поверхность оказываетъ на точку реакцію R, то, обратно, точка M оказываетъ на поверхность нѣкоторую силу D



Чертежъ 61.

равную и противоположную R. Эта сила называется *давленiемъ* точки на поверхность. Очевидно, способы для опредѣленія *давленія и реакціи* совершенно одинаковы.

§ 5. *ЗАДАЧИ.*

Первая задача. Разсмотримъ движеніе тяжелой точки по гладкой плоскости, составляющей съ горизонтомъ уголъ α.

Примемъ эту плоскость за плоскость XOY (черт.62), тогда уравненіе ея будетъ:

$$z=0;$$

ось OX направлена перпендикулярно къ прямой AB пересѣченія наклонной плоскости съ плоскостью горизонтальной, т.е. по линіи наибольшаго ската. Начальныя условія будутъ:

$$t_0=0;\ x_0,y_0,z_0=0;\ x'_0,y'_0,z'_0=0.$$

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія:

$$\left.\begin{aligned} mx''&=mg.\sin\alpha,\\ my''&=0,\\ mz''&=-mg.\cos\alpha+R.\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots (6')$$

Можно было предвидѣть, что R войдетъ только въ третье изъ уравненій $(6')$, такъ какъ реакція направлена по нормали къ плоскости XOY.

Первое изъ уравненій $(6')$ намъ даетъ:

$$x'=g.\sin\alpha.t+C;$$

но по начальнымъ даннымъ:

$$C = x_0'$$

слѣдовательно:

$$x' = g\cdot\sin\alpha t + x_0' ,$$

откуда

$$x = \frac{1}{2} g\sin\alpha t^2 + x_0' t + D ,$$

гдѣ

$$D = x_0 ;$$

слѣдовательно:

$$x = \frac{1}{2} g\cdot\sin\alpha t^2 + x_0' t + x_0 \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Второе изъ уравненій (6) намъ даетъ:

$$y'' = 0 ;$$

слѣдовательно, $y' = C$, или $y' = y_0'$

$$y = y_0' t + D_1 ;$$

но

$$D_1 = y_0 ,$$

слѣдовательно:

$$y = y_0' t + y_0 \ldots\ldots\ldots\ldots (*)(*)$$

Уравненія (*) и (*)(*) опредѣляютъ движеніе тяжелой точки по гладкой наклонной плоскости; они, какъ видимъ, отличаются отъ уравненій для движенія свободной матеріальной точки при дѣйствіи силы тяжести только тѣмъ, что вмѣсто ускоренія g здѣсь входитъ $g\sin\alpha$.

Третье изъ уравненій (6') опредѣляетъ *реакцію.* Такъ какъ

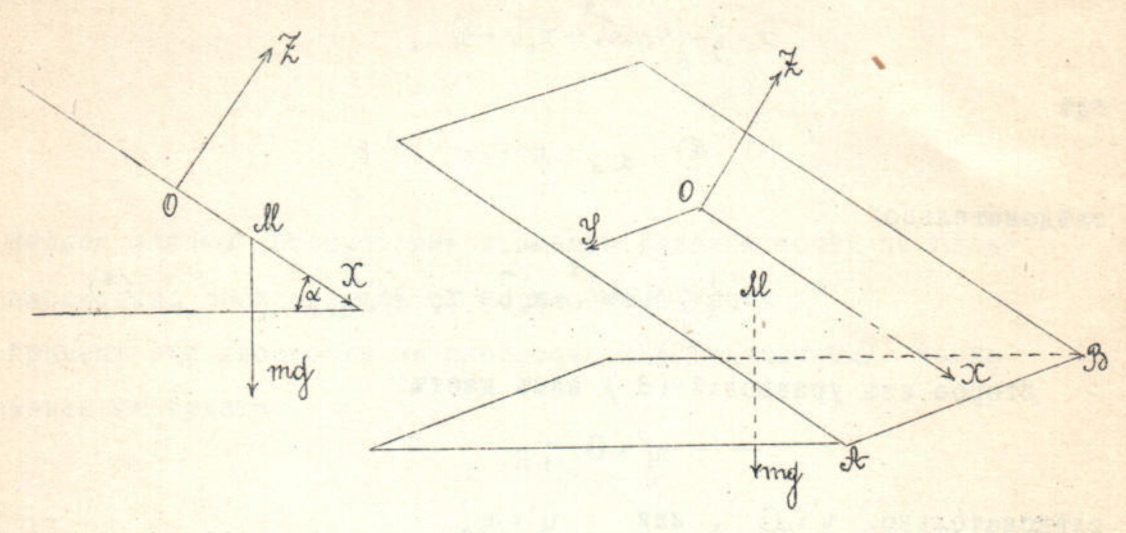
$$z'' = 0 ,$$

то

$$R = mg\cdot\cos\alpha ,$$

т.е. реакція равна составляющей силы тяжести по перпендикуля-

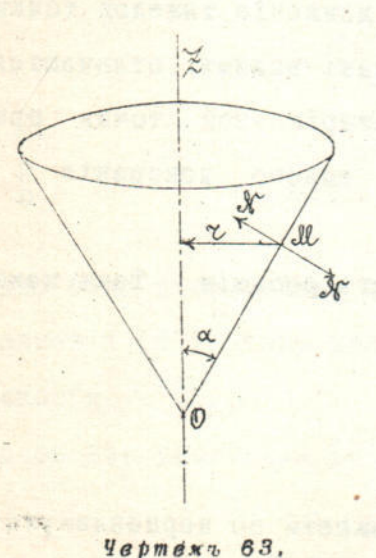
ру къ плоскости. Знакъ плюсъ показываетъ, что реакція направлена по положительной нормали, т.е. по положительной оси Oz



Чертежъ 62.

Вторая задача. Разсмотримъ движеніе точки по поверхности круглаго конуса подъ вліяніемъ силы притяженія по перпендикуляру къ оси этого конуса, обратно пропорціональной кубу разстоянія точки отъ оси (черт. 63).

Пусть сила притяженія единицы массы на единицѣ разстоянія будетъ k, тогда величина данной силы выразится такъ:



Чертежъ 63.

$$-\frac{k.m}{r^3}$$

Уравненіе поверхности конуса будетъ:

$$r = pz .$$

или

$$x^2 + y^2 - p^2 z^2 = 0 ,$$

гдѣ

$$p = \operatorname{tg}\alpha .$$

Посмотримъ, что даютъ намъ законы живой силы и площадей. Въ нашемъ случаѣ сила имѣетъ потенціалъ и силовая функція будетъ:

$$U = \int -\frac{km}{r^3}\,dr = \frac{km}{2r^2}.$$

Имѣемъ интегралъ живой силы:

$$\frac{m.v^2}{2} - \frac{km}{2r^2} = h_1 (\text{пост}).$$

Сокративъ на $\frac{m}{2}$, получимъ:

$$v^2 - \frac{k}{r^2} = h, \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

гдѣ

$$h = \frac{2h_1}{m}.$$

Моментъ силы относительно оси конуса равенъ нулю, такъ какъ сила пересѣкаетъ ось; также и моментъ реакціи относительно оси конуса равенъ нулю, такъ какъ конусъ нашъ есть поверхность вращенія; поэтому существуетъ интегралъ площадей въ плоскости, перпендикулярной къ оси Oz:

$$r^2\varphi' = C (\text{пост.}) \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

Опредѣлимъ постоянныя произвольныя h и C изъ начальныхъ данныхъ x_0. y_0, x_0', y_0'.

Этими данными уже опредѣляются z_0 и z_0'. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$x^2 + y^2 - p^2z^2 = 0 ,$$

откуда

$$z_0 = \frac{\pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{p} ;$$

(въ нашемъ случаѣ +), и

$$xx'+yy'-p^2 zz'=0 ;$$

откуда

$$z_0' = \frac{x_0 x_0' + y_0 y_0'}{p^2 z_0}$$

По начальнымъ даннымъ найдемъ:

$$v_0' = \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}$$

и

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} ;$$

слѣдовательно:

$$h = v_0^2 - \frac{k}{r_0^2} .$$

Такъ какъ

$$x y' - y x' = r^2 \varphi' ,$$

то

$$C = x_0 y_0' - y_0 x_0' .$$

Если заданы полярныя координаты, то

$$C = r_0^2 \varphi_0' ,$$

если заданы скорость и ея направленіе, то

$$C = r_0 v_0 \sin(r_0, v_0) . \sin(v, Z) .$$

Опредѣлимъ движеніе точки.

Напишемъ интегралъ (8) живой силы въ видѣ:

$$z'^2 + r'^2 + r^2 \varphi'^2 = \frac{k}{r^2} + h \quad . . . . (10)$$

Исключая изъ уравненій (9) и (10) и уравненія поверхности двѣ координаты r и φ мы получимъ одно уравненіе съ одной координатой z .

Такъ какъ

$$r = p \cdot z,$$

то

$$r' = p \cdot z'.$$

Изъ уравненія (9)

$$\varphi' = \frac{C}{r^2} = \frac{C}{p^2 \cdot z^2}.$$

Подставимъ въ уравненіе (10)

$$z'^2 + p^2 z'^2 + \frac{C^2}{p^2 \cdot z^2} = \frac{k}{p^2 \cdot z^2} + h,$$

или

$$p^2 \cdot z^2 \cdot z'^2 \cdot (1+p^2) = k - C^2 + h \cdot p^2 \cdot z^2.$$

Извлекая квадратный корень, получимъ:

$$p \cdot z \cdot z' \sqrt{1+p^2} = \sqrt{k - C^2 + h \cdot p^2 \cdot z^2}.$$

Передъ радикаломъ возьмемъ знакъ плюсъ или минусъ, смотря по тому, возрастаетъ z при движеніи или убываетъ; пусть будетъ знакъ плюсъ; тогда

$$p\sqrt{1+p^2} \cdot \frac{z \cdot dz}{\sqrt{k - C^2 + h \cdot p^2 \cdot z^2}} = dt.$$

Интегрируемъ:

$$\frac{p\sqrt{1+p^2}}{h p^2} \int \frac{h \cdot p^2 d(z^2)}{2\sqrt{k - C^2 + h p^2 z^2}} = \frac{p\sqrt{1+p^2}}{h \cdot p^2} \sqrt{k - C^2 + h p^2 z^2} = t + A;$$

откуда

$$k - C^2 + h p^2 z^2 = \frac{h^2 p^2}{1+p^2} (t + A)^2.$$

Постоянную A опредѣляемъ, полагая $t_0 = 0$

$$A = \frac{\sqrt{1+p^2}}{h \cdot p} \cdot \sqrt{k - C^2 + h p^2 z_0^2}.$$

Такимъ образомъ

$$z=\frac{1}{p\sqrt{h}}\sqrt{\frac{h^2p^2}{1+p^2}(t+A)^2-k+C^2}$$

Мы нашли z въ функціи времени, легко уже затѣмъ найти и φ', проинтегрировавши выраженіе φ, найдемъ уголъ φ, какъ функцію времени.

Опредѣлимъ *реакцію* или давленіе точки на поверхность.

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m.x''=-\frac{km}{r^3}x+\frac{R}{\Delta f}2x,$$

$$my''-\frac{km}{r^4}y+\frac{R}{\Delta f}2y,$$

$$mz''=-\frac{R}{\Delta f}\cdot 2p^2z.$$

Для опредѣленія реакціи возьмемъ третье изъ этихъ уравненій. Принимая во вниманіе, что

$$\Delta f=\sqrt{4x^2+4y^2+4p^4z^2}=2\sqrt{p^2z^2+p^4z^2}=2pz\sqrt{1+p^2},$$

находимъ:

$$R=-\frac{\sqrt{1+p^2}}{p}m.z''.$$

Выраженіе z'' въ функціи отъ времени получимъ, дифференцируя два раза вышеприведенное выраженіе z

Третья задача. Опредѣлимъ давленіе, которое оказываетъ на поверхность шара движущаяся по ней тяжелая точка.

Уравненіе поверхности:

$$x^2+y^2+z^2-l^2=0.$$

Условіе для скорости:

$$xx' + yy' + zz' = 0 .$$

Условіе для ускоренія:

$$xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + z'^2 + y'^2 = 0$$

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

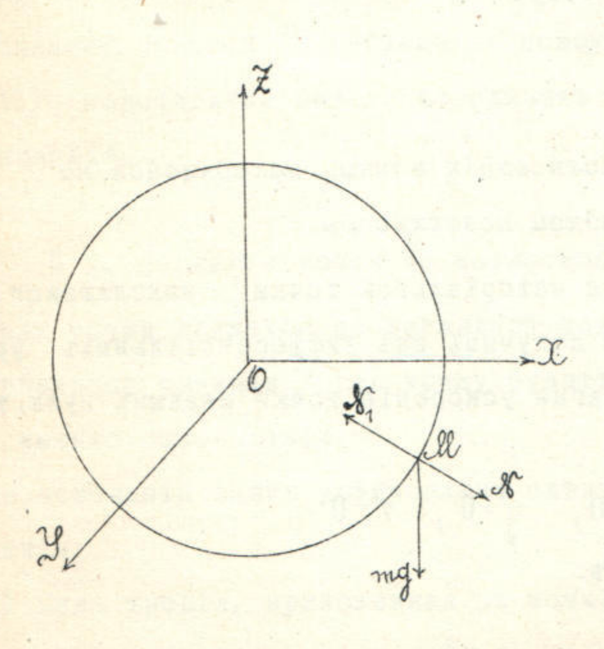
$$mx'' = \frac{R}{\Delta f} \cdot 2x,$$

$$my'' = \frac{R}{\Delta f} \cdot 2y,$$

$$mz' = \frac{R}{\Delta f} \cdot 2z,$$

$$\Delta f = 2\sqrt{x^2 + y^2 + x^2} = 2l.$$

Въ этихъ уравненіяхъ $R > 0$, когда реакція направлена въ наружную сторону по направленію MN (черт. 64) и $R < 0$, когда реакція направлена во внутреннюю сторону по MN_1.



Чертежъ 64.

Подставляя значенія вторыхъ производныхъ отъ координатъ по времени въ уравненіе, выражающее условіе для ускоренія, найдемъ:

$$\frac{R}{2 \cdot l \cdot m} \cdot 2l^2 - gz + v^2 = 0 ,$$

откуда

$$R = \frac{m}{l}(gz - v^2) .$$

Квадратъ скорости можно легко выразить съ помощью интеграла живой силы, такъ какъ существуетъ силовая функція:

$$U = -mg.z.$$

Мы имѣемъ:

$$\frac{mv^2}{2} = -mg.z + h;$$

(постоянная h опредѣляется по начальнымъ даннымъ). Отсюда:

$$v^2 = -2g.z + \frac{2h}{m};$$

значитъ:

$$R = \frac{1}{l}(mg.z + 2mg.z - 2h) = \frac{1}{l}(3mg.z - 2h).$$

Это же выраженіе служитъ и для опредѣленія *давленія*. Реакція шара сдѣлается равною нулю тогда, когда точка придетъ въ такое положеніе, для котораго $z = \frac{2h}{3mg}$; это положеніе находится на верхней полусферѣ.

§ 6. *Уравненія равновѣсія точки, находящейся на гладкой поверхности.*

Уравненія равновѣсія матеріальной точки, находящейся на гладкой поверхности, мы получимъ изъ дифференціальныхъ уравненій движенія (6), полагая ускореніе точки равнымъ нулю, т. е. полагая, что

$$x'' = 0, \quad y'' = 0, \quad z'' = 0.$$

Уравненія эти будутъ:

$$\left.\begin{aligned} X + \frac{R}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ Y + \frac{R}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ Z + \frac{R}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

Исключая величину R, находимъ:

$$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Эти равенства выражаютъ условіе, необходимое и достаточное для равновѣсія точки на гладкой поверхности: равнодѣйствующая данныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, должна быть направлена по нормали къ поверхности.

Два уравненія (11) вмѣстѣ съ уравненіемъ поверхности $f(x, y, z)=0$, послужатъ намъ для опредѣленія *положенія* равновѣсія точки на гладкой поверхности при дѣйствіи заданныхъ силъ, т.е. для опредѣленія трехъ координатъ точки (x, y, z); такимъ образомъ мы можемъ получить одно положеніе равновѣсія точки, или нѣкоторое конечное число положеній равновѣсія, но можемъ и безконечное большое число положеній равновѣсія на нѣкоторой линіи или на нѣкоторой части поверхности.

Величину реакціи R найдемъ съ помощью одного изъ уравненій (10), подставивши вмѣсто координатъ x, y, z полученныя ихъ значенія.

§ 7. *Движеніе точки по негладкой поверхности.*

Если точка движется по негладкой поверхности, тогда, кромѣ нормальной реакціи R, на точку будетъ дѣйствовать еще одна сила, именно *сила тренія*.

На основаніи опыта установлены слѣдующія два свойства силы тренія:

1) Сила тренія, приложенная къ точкѣ, направлена по той же прямой, что и скорость точки, но въ противоположную сторону;

2) Величина силы тренія равна абсолютной величинѣ нормаль-

ной реакціи, умноженной на нѣкоторый постоянный коэффиціентъ k, называемый *коэффиціентомъ динамическаго тренія;* - этотъ коэффиціентъ характеризуетъ степень шероховатости данной поверхности.

Такимъ образомъ:

$$T = k[R],$$

гдѣ $[R]$ обозначаетъ абсолютную величину нормальной реакціи.

Коэффиціентъ тренія динамическаго, развивающагося при движеніи точки по поверхности, *не болѣе коэффиціента статическаго тренія* той же поверхности, т.е. коэффиціента тренія въ случаѣ покоющейся точки.

Такъ какъ cosinus'ы угловъ, образуемыхъ скоростью точки съ координатными осями, выражаются отношеніями $\frac{x'}{v}$, $\frac{y'}{v}$, $\frac{z'}{v}$, то на основаніи упомянутыхъ выше свойствъ силы тренія, проекціи ея на координатныя оси будутъ:

$$T.\cos(T,X) = k.[R].\left(-\frac{x'}{v}\right) = -k.[R].\frac{x'}{v},$$

$$T.\cos(T,Y) = -k.[R].\frac{y'}{v},$$

$$T.\cos(T,Z) = -k.[R].\frac{z'}{v}.$$

Присоединяя къ задаваемымъ силамъ, приложеннымъ къ точкѣ, нормальную реакцію поверхности и силу тренія, мы разсматриваемъ точку какъ свободную; и потому получаемъ дифференціальныя уравненія движенія точки по негладкой поверхности въ видѣ:

$$m.x'' = X + \frac{R}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x} - k.[R].\frac{x'}{v},$$

$$m.y'' = Y + \frac{R}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y} - k.[R].\frac{y'}{v},$$

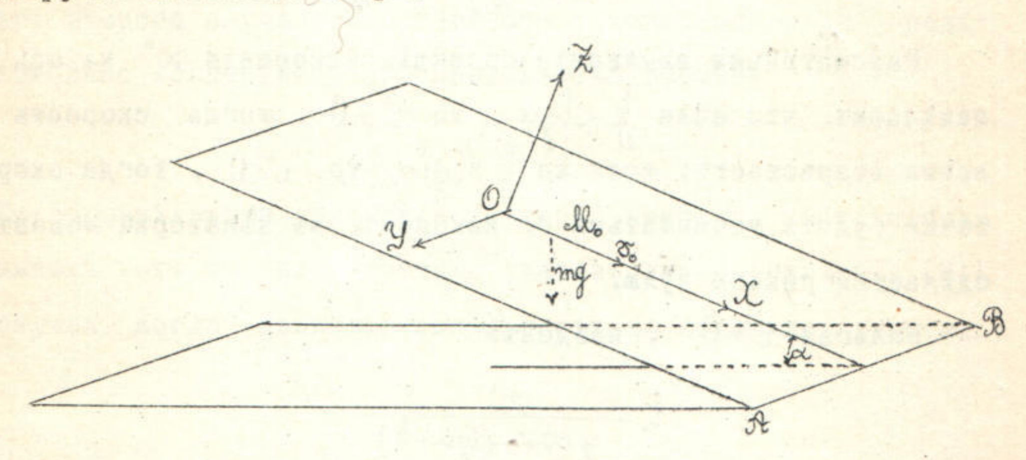
$$m.z'' = Z + \frac{R}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z} - k.[R].\frac{z'}{v}.$$

Присоединяя къ этимъ тремъ уравненіямъ уравненіе поверхности $f(x'', y'', z'') = 0$, имѣемъ четыре уравненія для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ: x'', y'', z'', R.

Примѣръ.

Прямолинейное движеніе тяжелой точки по негладкой наклонной плоскости.

Пусть α - уголъ, составляемый плоскостью съ горизонтомъ (черт.65), k - коэффиціентъ динамическаго тренія. Наклонную плоскость принимаемъ за плоскость XOY; ось OX направляемъ по линіи наибольшаго наклона внизъ; ось OZ по перпендикуляру къ плоскости вверхъ.



Чертежъ 65.

Уравненіе плоскости: $z = 0$.

Пусть начальная скорость v_0 направлена по оси OX внизъ $(x'_0 > 0)$, тогда дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m.x'' = m.g.\sin\alpha - k.[R],$$

$$m.y'' = 0,$$

$$m.z'' = -m.g.\cos\alpha + R.$$

Такъ какъ $z'' = 0$, то изъ послѣдняго дифференціальнаго уравненія находимъ:

$$R = m.g.\cos\alpha.$$

Подставимъ значеніе R въ первое изъ дифференціальныхъ уравненій:

$$m x'' = m g \sin\alpha - k m g \cos\alpha$$

откуда, по сокращеніи на m, имѣемъ:

$$x'' = g \cos\alpha (\operatorname{tg}\alpha - k).$$

Отсюда слѣдуетъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ ускореніе постоянно, т.е., что точка движется равноускоренно.

Полагая, что начальныя данныя суть: x_0 и x_0', найдемъ:

$$x' = x_0' + g \cos\alpha (\operatorname{tg}\alpha - k) \cdot t,$$

и

$$x = x_0 + x_0' t + \frac{1}{2} g \cos\alpha (\operatorname{tg}\alpha - k) \cdot t^2.$$

Разсматривая выраженіе проекціи ускоренія x'' на ось OX, замѣчаемъ, что если $k < \operatorname{tg}\alpha$, то $x'' > 0$, тогда скорость все время возрастаетъ; если же $k > \operatorname{tg}\alpha$, то $x'' < 0$, тогда скорость точки будетъ уменьшаться и, наконецъ, въ нѣкоторый моментъ сдѣлается равною нулю.

Полагая $x' = 0$, найдемъ:

$$t_1 = -\frac{x_0'}{g \cos\alpha (\operatorname{tg}\alpha - k)}.$$

Такъ какъ $\operatorname{tg}\alpha - k < 0$, то при $x_0' > 0$, $t_1 > 0$; это показываетъ, что моментъ t_1 слѣдуетъ за начальнымъ моментомъ; такимъ образомъ, въ разсматриваемомъ случаѣ движущаяся точка останавливается въ моментъ t_1 и затѣмъ продолжаетъ оставаться въ покоѣ.

Если начальная скорость v_0 будетъ направлена *вверхъ* ($x_0' < 0$), то первое изъ дифференціальныхъ уравненій движенія представится въ видѣ:

$$m x'' = m g \sin\alpha + k |R|$$

и въ послѣдующія формулы вмѣсто $(\operatorname{tg}\alpha - k)$ войдетъ $(\operatorname{tg}\alpha + k)$.

Примѣчаніе. Уравненіе данной поверхности, по которой движется матеріальная точка, содержитъ время [$f(x, y, z, t)$] въ тѣхъ случаяхъ, когда поверхность сама *движется* или *деформируется*.

Примѣръ перваго случая представляетъ падающая подъ вліяніемъ силы тяжести наклонная плоскость, составляющая съ горизонтомъ уголъ α; если плоскость остается параллельной самой себѣ, то предполагая, что ось Oz направлена по перепендикуляру къ плоскости вверхъ, мы получимъ уравненіе плоскости въ видѣ:

$$z + \frac{1}{2} g t^2 \cos\alpha = 0 \quad ;$$

примѣръ второго случая представляетъ поверхность шара, радіусъ котораго возрастаетъ пропорціонально времени

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a + bt)^2 = 0 \ .$$

Дифференціальныя уравненія движенія точки въ этихъ случаяхъ имѣютъ тотъ же видъ, который указанъ выше [уравненія (6)] для случая, когда уравненіе поверхности не содержитъ времени.

Г Л А В А VII.

ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ ПО КРИВОЙ.

§ 1. *Дифференціальныя уравненія движенія и реакція кривой.*

Кривая задается обыкновенно уравненіями двухъ поверхностей, которыя своимъ пересѣченіемъ ее образуютъ:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)\ ^{*)}$$

Уравненія (1) будутъ содержать время t въ тѣхъ случаяхъ, когда кривая движется или деформируется, но здѣсь мы будемъ разсматривать только тотъ случай, когда данная кривая неподвижна.

Въ простѣйшемъ случаѣ, когда данная кривая плоская, мы принимаемъ ея плоскость за плоскость XOY и тогда уравненія кривой будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y) = 0, \\ z = 0 \ . \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1')$$

Первое изъ уравненій (1') есть уравненіе цилиндра, производящія котораго параллельны оси OZ, второе -уравненіе плоскости XOY.

Данная кривая можетъ быть *реальная*, какъ напримѣръ, желобъ или криволинейная трубка, (въ которой движется матеріальная точка), и *геометрическая*, въ дѣйствительности несуществующая, а дающая лишь геометрическое представленіе нѣкотораго условія; - по такой кривой, именно, по окружности, движется, напримѣръ, матеріальная точка, прикрѣпленная къ стержню, вращающемуся вокругъ неподвижной оси.

Реальная кривая можетъ быть *гладкая и негладкая*. Мы бу-

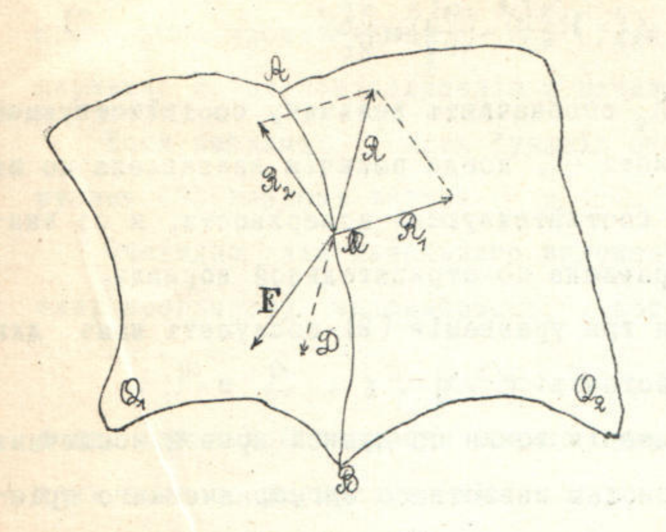
---

*) *Въ частныхъ случаяхъ уравненія (1) могутъ имѣть болѣе простой видъ:*

$$f_1(x, y) = 0,$$
$$f_2(x, z) = 0.$$

или

$$y - \varphi_1(x) = 0,$$
$$z - \varphi_2(x) = 0.$$



Чертежъ 66.

демъ сначала разсматривать случай *гладкой кривой*, къ которому относится и движеніе точки по геометрической кривой.

Пусть точка M движется по кривой AB (черт. 66), представляющей пересѣченіе двухъ гладкихъ поверхностей, которыя обозначимъ через Q_1 и Q_2.

Пусть проекціи равнодѣйствующей F данныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, будутъ X, Y, Z. Каждая изъ поверхностей Q_1 и Q_2 оказываетъ на точку реакцію, направленную по нормали къ поверхности, первая - реакцію R_1, вторая - реакцію R_2.

Присоединяя къ задаваемымъ силамъ, приложеннымъ къ точкѣ, реакціи поверхностей, мы разсматриваемъ точку, какъ свободную, и потому дифференціальныя уравненія движенія точки по гладкой кривой получимъ въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} m.x'' &= X + \frac{R_1}{\Delta f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{R_2}{\Delta f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ my'' &= Y + \frac{R_1}{\Delta f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{R_2}{\Delta f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ m.z'' &= Z + \frac{R_1}{\Delta f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{R_2}{\Delta f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ

$$\Delta f_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2},$$

и

$$\Delta f_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2} \qquad *)$$

Какъ R_1, такъ и R_2 обозначаютъ величину соотвѣтствующей реакціи, взятую со знакомъ $+$, когда реакція направлена по положительной нормали къ соотвѣтствующей поверхности, и со знакомъ $-$, когда она направлена по отрицательной нормали.

Два уравненія (1) и три уравненія (2) послужатъ намъ для опредѣленія пяти неизвѣстныхъ: x, y, z, R_1 и R_2.

Для опредѣленія движенія точки по данной кривой, исключимъ изъ уравненій (2) съ помощью извѣстнаго алгебраическаго пріема реакціи R_1 и R_2.

Въ полученное уравненіе подставимъ вмѣсто y, z, y', z', y'', z'', ихъ выраженія въ функціяхъ отъ x, полученныя изъ уравненій (1).

Если уравненія (1) дадутъ:

$$\left.\begin{array}{l} y = \varphi_1(x), \\ z = \varphi_2(x), \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

то

$$\left.\begin{array}{l} y' = \varphi_1'(x).x', \\ z' = \varphi_2'(x).x', \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

и

$$\left.\begin{array}{l} y'' = \varphi_1''(x).x'^2 + \varphi_1'(x).x'', \\ z'' = \varphi_2''(x).x'^2 + \varphi_2'(x).x''. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (5)$$

Въ результатѣ мы получимъ дифференціальное уравненіе второго порядка относительно координаты x. Интегрируя это ура-

---

*) *Замѣтимъ, что тѣ же уравненія (2) выражаютъ движеніе точки по кривой и въ томъ случаѣ, когда уравненія ея будутъ содержать время* t:

$$f_1(x, y, z, t) = 0,$$

$$f_2(x, y, z, t) = 0.$$

вненіе, мы найдемъ первый и второй интегралы, содержащіе двѣ постоянныя произвольныя C и D, для опредѣленія которыхъ послужатъ: начальное положеніе и начальная скорость точки.

Если найдемъ x, какъ функцію отъ t, C и D, то по формуламъ (3) найдемъ затѣмъ y и z.

Очевидно, для начальнаго положенія можно задать только одну координату, напримѣръ, x_0, потому что по формуламъ (3)

$$y_0 = \varphi_1(x_0); \quad z_0 = \varphi_2(x_0);$$

а для начальной скорости только одну проекцію, напримѣръ, x_0', такъ какъ по формуламъ (4):

$$y_0' = \varphi_1'(x_0) \cdot x_0',$$

и

$$z_0' = \varphi_2'(x_0) \cdot x_0'.$$

Перейдемъ къ разсмотрѣнію *реакцій* R_1 и R_2.

Эти реакціи мы можемъ сложить по правилу параллелограмма въ одну равнодѣйствующую R (черт.66).

Сила R, заключающаяся въ плоскости (R_1, R_2), нормальной къ данной кривой, называется *реакціей кривой;* такимъ образомъ реакція кривой линіи есть равнодѣйствующая двухъ реакцій, которыя оказываютъ на точку двѣ поверхности, пересѣкающіяся по этой кривой.

Очевидно, что сумма двухъ послѣднихъ членовъ въ каждомъ изъ уравненій (2) выражаетъ проекцію реакціи кривой R на соотвѣтственную ось, такъ что:

$$R.\cos(R, X) = \frac{R_1}{\Delta f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{R_2}{\Delta f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x},$$

$$R.\cos(R, Y) = \frac{R_1}{\Delta f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{R_2}{\Delta f_2}\frac{\partial f_2}{\partial y},$$

$$R.\cos.(R, Z) = \frac{R_1}{\Delta f_1}\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{R_2}{\Delta f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

или по тѣмъ же уравненіямъ (2):

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{R}.\cos(\mathcal{R},\mathcal{X}) &= m.x'' - \mathrm{X}, \\ \mathcal{R}.\cos(\mathcal{R},\mathcal{Y}) &= m.y'' - \mathrm{Y}, \\ \mathcal{R}.\cos(\mathcal{R},\mathcal{Z}) &= m.z'' - \mathrm{Z}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (6)$$

Зная данныя силы, приложенныя къ точкѣ, и движеніе точки, найдемъ изъ уравненій (6) три проекціи реакціи $\mathcal{R}$, какъ функціи времени, а слѣдовательно, опредѣлимъ величину и направленіе реакціи кривой.

Если кривая оказываетъ на точку $\mathcal{M}$ реакцію $\mathcal{R}$, то по извѣстному принципу, обратно, точка $\mathcal{M}$ оказываетъ на кривую силу $\mathcal{D}$, равную и противоположную реакціи $\mathcal{R}$ (черт.66),- эта сила называется: *давленіе точки* на кривую.

Такимъ образомъ изъ опредѣленія давленія слѣдуетъ, что нахожденіе реакціи кривой линіи и нахожденіе давленія точки на кривую - вопросы равносильные; но *давленіе* на кривую разсматривается чаще, чѣмъ *реакція* кривой.

Въ случаѣ плоской кривой, какъ мы выше замѣтили, уравненія ея будутъ:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= 0, \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

Предположимъ сначала, что равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ точкѣ, во все время движенія направлена *въ плоскости кривой*, тогда проекціи ея будутъ: X, Y, $\mathrm{Z} = 0$

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія точки:

$$\left.\begin{aligned} m.x'' &= \mathrm{X} + \frac{\mathcal{R}}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}, \\ m.y'' &= \mathrm{Y} + \frac{\mathcal{R}}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

Эти два уравненія *), вмѣстѣ съ уравненіемъ $f(x,y)=0$ служатъ для опредѣленія трехъ неизвѣстныхъ: x, y, $\mathcal{R}$ въ функціяхъ времени.

Исключая $\mathcal{R}$ изъ уравненій движенія, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(mx''-X)-\frac{\partial f}{\partial x}(my''-Y)=0.$$

Подставляя сюда вмѣсто y его выраженіе въ функціи отъ x, полученное изъ уравненій (1'), и произведя интегрированіе, найдемъ x, какъ функцію отъ t и постоянныхъ произвольныхъ C и $\mathcal{D}$.

Зная x, легко найти y и затѣмъ $\mathcal{R}$.

Если равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ точкѣ, *не заключается* въ плоскости данной кривой, тогда проекціи ея будутъ: X, Y, Z, и дифференціальныя уравненія движенія представятся въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X+\frac{\mathcal{R}}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}, \\ my'' &= Y+\frac{\mathcal{R}}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}, \\ mz'' &= Z+\mathcal{R}_2. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (2'')$$

гдѣ $\mathcal{R}_2$ реакція плоскости кривой (плоскости XOY).

Такъ какъ $z''=0$, то третье изъ уравненій (2") дастъ намъ:

$$\mathcal{R}_2 = Z$$

Слѣдовательно, реакція плоскости по величинѣ равна составляющей данной силы по перпендикуляру къ плоскости и направлена въ противоположную сторону.

Координаты x, y и реакція $\mathcal{R}$ находятся такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

---

*) *Третье уравненіе обращается въ тождество:* $0=0$.

§ 2. *Законъ живой силы.*

Примѣнимъ *законъ живой силы* къ движенію точки по гладкой неподвижной кривой.

Знаемъ, что

$$d\frac{mv^2}{2} = F.ds.\cos(F,v) + R.ds.\cos(R,v),$$

но $R \perp v$, слѣдовательно, элементарная работа реакціи кривой равна нулю. Такимъ образомъ, безконечно малое приращеніе живой силы для точки, движущейся по гладкой неподвижной кривой, выражается такъ же, какъ и въ случаѣ свободной точки:

$$d\frac{mv^2}{2} = F.ds.\cos(F,v).$$

Если данная сила (или равнодѣйствующая данныхъ силъ), приложенная къ точкѣ, движущейся по гладкой неподвижной кривой, имѣетъ *потенціалъ* (U), то законъ живой силы даетъ намъ *интегралъ живой силы:*

$$\frac{mv^2}{2} - U = h. \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Слѣдуетъ имѣть въ виду, что для движенія точки по гладкой неподвижной кривой существуетъ интегралъ, аналогичный интегралу живой силы, всякій разъ, какъ данная сила, приложенная къ точкѣ *зависитъ только отъ положенія точки.*

Въ самомъ дѣлѣ, выразивши съ помощью двухъ уравненій данной кривой координаты точки x , y , z въ функціяхъ одной перемѣнной u (напримѣръ, въ функціяхъ отъ x), мы найдемъ въ разсматриваемомъ случаѣ слѣдующее выраженіе элементарной работы:

$$X.dx + Y.dy + Z.dz = F(u).du;$$

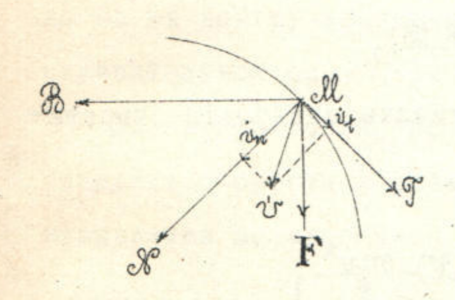
а тогда изъ закона живой силы получаемъ:

$$\frac{mv^2}{2} - \int \mathfrak{F}(u).du = const. \qquad \qquad (**)$$

Интегралъ живой силы (*) [или аналогичный интегралъ (**)] когда онъ существуетъ, *достаточенъ для опредѣленія движенія* точки по кривой, такъ какъ для этого достаточно найти одну изъ координатъ точки (напримѣръ, x), какъ функцію времени.

§ 3. *Вторая форма дифференціальныхъ уравненій движенія точки по неподвижной кривой.*

Уравненія данной кривой въ нѣкоторыхъ случаяхъ трудно написать, въ другихъ они очень сложны; поэтому мы составимъ теперь дифференціальныя уравненія движенія точки по неподвижной кривой въ иномъ видѣ, взявши проекціи ускоренія, силы и реакціи на три взаимно перпендикулярныя оси, движущіяся вмѣстѣ съ точкой именно, на *касательную* $(M\mathfrak{T})$ къ кривой, направленную въ сторону движенія точки (т.е. на направленіе скорости) (черт. 67), на главную нормаль $(M\mathfrak{N})$, направленную къ центру кривизны кривой, и на перпендикуляръ къ этимъ двумъ осямъ, т.е. на *бинормаль* $(M\mathfrak{B})$.



Чертежъ 67.

Выраженіе для проекцій ускоренія на касательную и главную нормаль траекторіи точки намъ уже извѣстны изъ курса Кинематики:

$$\dot{v}.\cos(\dot{v}, \mathfrak{T}) = \frac{dv}{dt},$$

$$\dot{v}.\cos(\dot{v}, \mathfrak{N}) = \frac{v^2}{\varrho},$$

гдѣ ϱ радіусъ кривизны траекторіи. Такъ какъ ускореніе нахо-

дится въ плоскости кривизны, то проекція ускоренія на бинормаль траекторіи равна нулю:

$$v.\cos(v, \mathcal{B}) = 0$$

Такимъ образомъ, дифференціальныя уравненія движенія точки представятся въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= \mathbf{F}.\cos(\mathbf{F},\mathcal{T}),^{*)} \\ m\frac{v^2}{\varrho} &= \mathbf{F}.\cos(\mathbf{F},\mathcal{N}) + \mathcal{R}.\cos(\mathcal{R},\mathcal{N}), \\ 0 &= \mathbf{F}.\cos(\mathbf{F},\mathcal{B}) + \mathcal{R}.\cos(\mathcal{R},\mathcal{B}). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Первое изъ уравненій (7) служитъ для опредѣленія движенія, а второе и третье для опредѣленія *реакціи* $\mathcal{R}$, слѣдовательно, и для опредѣленія *давленія* $\mathcal{D}$ точки на кривую. Принимая во вниманіе, что:

$$\mathcal{D}.\cos(\mathcal{D},\mathcal{N}) = -\mathcal{R}.\cos(\mathcal{R},\mathcal{N}),$$

и

$$\mathcal{D}.\cos(\mathcal{D},\mathcal{B}) = -\mathcal{R}.\cos(\mathcal{R},\mathcal{B}),$$

можемъ на основаніи уравненій (7) написать слѣдующія выраженія проекцій давленія:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{D}.\cos.(\mathcal{D},\mathcal{N}) &= \mathbf{F}.\cos(\mathbf{F},\mathcal{N}) - \frac{mv^2}{\varrho}, \\ \mathcal{D}.\cos(\mathcal{D},\mathcal{B}) &= \mathbf{F}.\cos(\mathbf{F},\mathcal{B}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Чтобы найти проекціи данной силы $\mathbf{F}$ на главную нормаль и на бинормаль, спроектируемъ эту силу предварительно на нормальную плоскость $\mathcal{NMB}$ (черт. 68).

Обозначимъ проекцію силы $\mathbf{F}$ на пл. $\mathcal{NMB}$ черезъ $\mathbf{F}_n$. Оче-

---

*) *Проекція реакціи равна нулю, ибо:*

$$\cos(\mathcal{R},\mathcal{T}) = \cos(\mathcal{R},v) = 0.$$

видно:

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F} \sin(\mathbf{F}, \mathcal{T}),$$

$$\mathbf{F} \cos(\mathbf{F}, \mathcal{N}) = \mathbf{F}_n \cos(\mathbf{F}_n, \mathcal{N}),$$

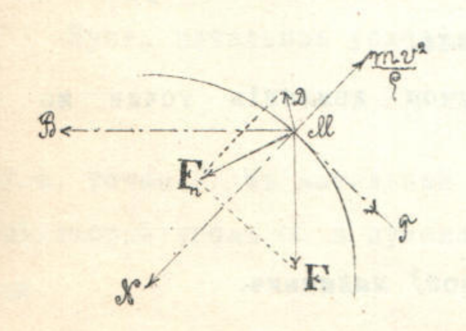
$$\mathbf{F} \cos(\mathbf{F}, \mathcal{B}) = \mathbf{F}_n \cos(\mathbf{F}_n, \mathcal{B}).$$

Подставляя въ уравненія (8) вмѣсто проекцій силы $\mathbf{F}$ на главную нормаль и бинормаль ихъ выраженія черезъ $\mathbf{F}_n$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{D}.\cos(\mathcal{D}, \mathcal{N}) &= \mathbf{F}_n \cos(\mathbf{F}_n, \mathcal{N}) - \frac{mv^2}{\rho}, \\ \mathcal{D}.\cos(\mathcal{D}, \mathcal{B}) &= \mathbf{F}_n \cos(\mathbf{F}_n, \mathcal{B}). \end{aligned}\right\} \qquad (8')$$

Изъ уравненій (8') слѣдуетъ, что проекціи на главную нормаль и бинормаль давленія на кривую выражаются двумя членами; значитъ, давленіе есть равнодѣйствующая двухъ силъ; одна изъ нихъ есть проекція данной силы на нормальную плоскость, а другая по величинѣ равна $\frac{m.v^2}{\rho}$ и направлена по главной нормали, но не къ центру кривизны, а въ сторону выпуклости (въ сторону отрицательной оси $\mathcal{N}$).

Эта вторая сила, по величинѣ равная массѣ, умноженной на квадратъ скорости и раздѣленной на радіусъ кривизны ($\frac{m.v^2}{\rho}$), называется *центробѣжной силой*.



Чертежъ 68.

Такимъ образомъ, *давленіе точки на кривую есть равнодѣйствующая двухъ силъ:* проекціи данной силы на нормальную плоскость и центробѣжной силы.

Изъ сказаннаго ясно, что центробѣжная сила есть только составляющая того давленія, которое точка оказываетъ на кривую, значитъ, центробѣжная сила

не есть сила, приложенная къ точкѣ, а исходящая отъ точки и приложенная къ кривой, по которой точка движется.

Замѣтимъ, что сила, по величинѣ равная ускоренію точки, умноженному на массу (mv'), и направленная въ сторону, *противоположную ускоренію,* называется *силою инерціи;* обозначимъ силу инерціи черезъ Q ; очевидно, проекціи ея на координатныя оси будутъ:

$$Q.\cos(Q,X) = -mx'',$$

$$Q.\cos(Q,Y) = -my'',$$

$$Q.\cos(Q,Z) = -mz'';$$

а проекціи на касательную, на главную нормаль и на бинормаль траекторіи будутъ:

$$Q.\cos(Q,T) = -m\frac{dv}{dt},$$

$$Q.\cos(Q,N) = -m\frac{v^2}{\rho},$$

$$Q.\cos(Q,B) = 0.$$

Второе изъ этихъ уравненій показываетъ, что *центробѣжная сила есть нормальная составляющая силы инерціи.*

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что въ томъ случаѣ, когда точка движется по кривой съ постоянной скоростью, сила инерціи и есть ничто иное, какъ центробѣжная сила.

Разсмотримъ важнѣйшіе *частные случаи* движенія точки *по кривой.*

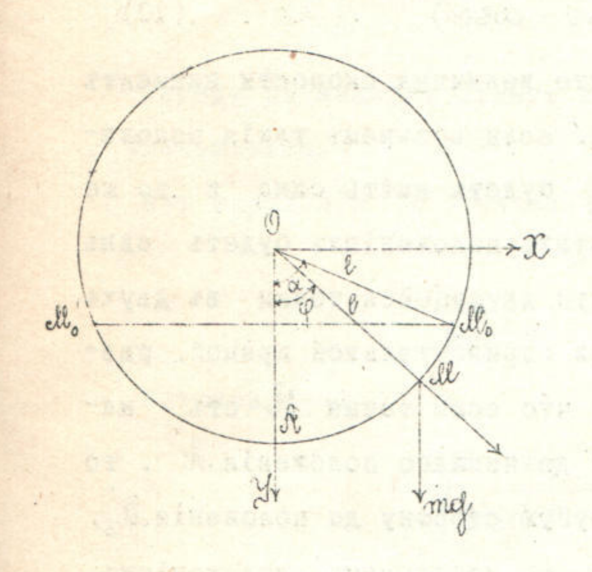
§ 4. *Математическій (круговой) маятникъ.*

Тяжелая точка M (черт.69) соединена съ неподвижной точкой O посредствомъ невѣсомаго, негибкаго и нерастяжимаго стержня длины l , который можетъ вращаться вокругъ точки O

въ вертикальной плоскости; разсмотримъ колебательное движеніе точки M.

Намъ предстоитъ такимъ образомъ разсмотрѣть колебательное движеніе тяжелой точки по *окружности* радіуса l, заключающейся въ вертикальной плоскости.

Центръ окружности возьмемъ за начало координатъ; ось OY направимъ вертикально внизъ.



Чертежъ 69.

Опредѣлимъ сначала *движеніе* точки M, а затѣмъ и давленіе ея на окружность или на стержень

1) *Движеніе*. Сила, приложенная къ точкѣ имѣетъ потенціалъ:

$$U = mgy ,$$

слѣдовательно, существуетъ законъ сохраненія живой силы и можетъ быть написанъ интегралъ живой силы:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy + h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Пусть начальныя условія будутъ:

$$t_0 = 0,\ v_0 = 0,\ y = l\cos\alpha ,$$

т.е. точка M въ начальный моментъ отклонена отъ оси OY на нѣкоторый уголъ α и пущена съ начальною скоростью, равною нулю.

Изъ начальныхъ условій находимъ:

$$h = -mg.l.\cos\alpha .$$

Подставляя въ уравненіе (9) значеніе постоянной произвольной h и введя перемѣнный уголъ φ, получимъ:

$$\frac{mv^2}{2} = mg.l.(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

откуда:

$$v^2 = 2g.l.(\cos\varphi - \cos\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Изъ уравненія (10) видимъ, что величина скорости зависитъ только отъ $\cos\varphi$, слѣдовательно, если возьмемъ такія положенія точки M, для которыхъ $\cos\varphi$ будетъ имѣть одно и то же значеніе, то скорость точки въ этихъ положеніяхъ будетъ одна и та же. Такимъ образомъ, скорости движущейся точки въ двухъ положеніяхъ, находящихся на одной горизонтальной прямой, равны между собою; отсюда слѣдуетъ, что если точка M отъ начальнаго положенія M_0 опустится до низшаго положенія A, то она непремѣнно поднимется по другую сторону до положенія M_0', находящагося на одномъ горизонтѣ съ начальнымъ положеніемъ, потому что тамъ только скорость будетъ равна нулю; при этомъ время, въ теченіе котораго точка проходитъ дуги M_0A и AM_0', будетъ *одинаково*.

Опредѣлимъ законъ, по которому происходитъ колебаніе маятника, т.е. найдемъ зависимость между угломъ φ и временемъ t.

Такъ какъ

$$v^2 = l^2.\varphi'^2 ,$$

то изъ уравненія (10)

$$\varphi'^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Пользуясь формулами:

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

получимъ:

$$\varphi'^2 = \frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right),$$

откуда:

$$\varphi' = -2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}\,.$$

Передъ радикаломъ будетъ знакъ –, потому что сначала уголъ φ уменьшается.

Изъ выраженія φ' находимъ:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = -2\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt \qquad \text{. . . . . (11)}$$

Интегрируемъ:

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = -2\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t + C \qquad \text{. . . . . . (12)}$$

Въ лѣвой части у насъ получился такъ называемый эллиптическій интегралъ, котораго мы въ конечномъ видѣ найти не можемъ.

Упростимъ нашъ эллиптическій интегралъ, вводя новую перемѣнную u, удовлетворяющую слѣдующему уравненію:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin u;\,^{*)}$$

отсюда находимъ:

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos u\cdot du,$$

и

---

*) *Мы имѣемъ право сдѣлать такую замѣну, ибо $\varphi < \alpha$, слѣдовательно:*

$$\sin\frac{\varphi}{2} < \sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2 u}\ ;$$

слѣдовательно:

$$d\varphi=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos u.du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2 u}}.$$

Такъ какъ

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2 u=\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2 u,$$

то

$$\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos u.$$

Подставимъ въ уравненіе (11), вмѣсто $d\varphi$ и радикала, найденныя значенія, получимъ:

$$\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2 u}}=\pm\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot dt.$$

Въ правой части здѣсь надо поставить знакъ +, а не -, какъ въ уравненіи (11), по слѣдующимъ соображеніямъ:

когда $\varphi=\alpha$, тогда $\sin u=1$ значитъ $u=\frac{\pi}{2}$,

" $\varphi=0$, " $\sin u=0$ " $u=\pi$,

" $\varphi=-\alpha$ " $\sin u=-1$ " $u=\frac{3\pi}{2}$

" $\varphi=0$ " $\sin u=0$ " $u=2\pi$ и т.д.

Мы видимъ, что перемѣнный уголъ u съ теченіемъ времени все возрастаетъ, слѣдонательно, производная $\frac{du}{dt}$ будетъ все время положительная, поэтому передъ корнемъ надо взять +, и эллиптическій интегралъ нашъ выразится такъ:

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2 u}}=+\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t+C_1\ \ldots\ldots\ \text{(12')}$$

Постоянную произвольную $C_1=\frac{c}{2}$ получимъ изъ уравненія (12) полагая

$$t=0,$$

и, слѣдовательно:

$$u=\frac{\pi}{2},$$

$$C_1=\left(\int\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2 u}}\right)_{u=\frac{\pi}{2}}.$$

Такимъ образомъ получимъ:

$$\left(\int\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2 u}}\right)_u-\left(\int\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 u}}\right)_{u=\frac{\pi}{2}}=\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

Отсюда ясно, что для того, чтобы опредѣлить время въ которое точка перемѣщается изъ M_0 въ какое угодно положеніе M мы должны взять опредѣленный интегралъ въ предѣлахъ отъ $\frac{\pi}{2}$ до соотвѣтствующаго положенію M значенія перемѣнной и помножить его на $\sqrt{\frac{l}{g}}$

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 u}}$$

Отсюда уже, какъ частный случай, находимъ время прохожденія точки изъ начальнаго положенія M_0 въ низшее положеніе A:

$$t_1=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2 u}}$$

Точно также найдемъ время прохожденія точки изъ A въ M

$$t_2=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 u}}$$

Важно опредѣлить *время одного размаха* математическаго ма-

ятника, т.е. время прохожденія точки изъ M_0 въ M_0', - обозначимъ его черезъ T; очевидно, будетъ:

$$T = t_1 + t_2$$

но выше было указано, что скорость точки на одномъ и томъ же горизонтѣ одна и та же, будетъ ли точка двигаться вверхъ или опускаться внизъ, значитъ:

$$t_1 = t_2.$$

и, слѣдовательно:

$$T = 2t_2 = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 u}}.$$

Введемъ, вмѣсто u, новую перемѣнную u_1, удовлетворяющую слѣдующему условію:

$$u_1 = u - \pi.$$

Отсюда, когда $u = \pi$, тогда $u_1 = 0$,

" $u = \frac{3\pi}{2}$ " $u_1 = \frac{\pi}{2}$.

Кромѣ того,

$$du_1 = du$$

и

$$\sin u_1 = \sin u$$

Такимъ образомъ:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du_1}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 u_1}}.$$

Разложимъ подъинтегральную функцію въ рядъ.

Обозначивши:

$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin u = x,$$

получимъ по биному Ньютона:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 \ldots\ldots$$

Поэтому предыдущее выраженіе T представится въ видѣ слѣдующей суммы:

$$T = 2.\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} du_1 + \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u_1 . du_1 + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\frac{\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u_1\, du_1 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6\frac{\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u_1 . du_1 + \ldots\right\}$$

Получился рядъ интеграловъ одного типа, которые находятся по общей формулѣ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} u_1\, du_1 = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\frac{\pi}{2}.$$

Примѣнивши эту формулу, находимъ:

$$T = \pi.\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.\sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2.\sin^6\frac{\alpha}{2} + \ldots\right\}.$$

При достаточно маломъ α только *приблизительно* можно принимать обычное выраженіе времени одного размаха:

$$T = \pi.\sqrt{\frac{l}{g}};$$

гораздо точнѣе, если положить sinus равнымъ дугѣ и удержать только второй членъ, время T выразится по формулѣ:

$$T = \pi.\sqrt{\frac{l}{g}}.\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Мы видимъ, что *время одного размаха* математическаго маятника *зависитъ* отъ угла начальнаго отклоненія: чѣмъ послѣдній больше, тѣмъ больше время колебанія, значитъ колебанія даннаго математическаго маятника, строго говоря, *не изохронны* *).

---

*) *ПРИМѢЧАНІЕ. Кромѣ колебательнаго движенія точка M въ разсматриваемомъ примѣрѣ можетъ, въ зависимости отъ величины начальной скорости, или приближаться къ верхней точкѣ окружности, или описывать всю окружность въ одномъ и томъ же направленіи.*

2) *Давленіе.* Опредѣлимъ давленіе тяжелой точки M на окружность вертикальнаго круга, по которой происходитъ колебательное движеніе.

Мы вывели слѣдующее общее выраженіе для проекціи давленія на главную нормаль

$$D.\cos(D, N) = F_n \cos(F_n, N) - \frac{mv^2}{\rho},$$

гдѣ F_n проекція силы на нормальную плоскость.

Въ разсматриваемомъ нами случаѣ нормаль N направлена по MO къ центру круга (черт. 69), и

$$\cos(D, N) = \pm 1;$$

затѣмъ

$$F_n \cos(F_n, N) = -m.g.\cos\varphi,$$

и

$$\frac{mv^2}{\rho} = \frac{mv^2}{l} = 2m.g.(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Подставляя эти значенія въ выраженіе проекціи давленія на главную нормаль, находимъ:

$$D.\cos(D, N) = -mg.\cos\varphi - 2.mg.(\cos\varphi - \cos\alpha);$$

отсюда

$$D = mg.(3\cos\varphi - 2.\cos\alpha)$$

и

$$\cos(D, N) = -1;$$

слѣдовательно, давленіе направлено въ сторону выпуклости.

§ 5. *Циклоидальный маятникъ.*

Разсмотримъ движеніе тяжелой точки по циклоидѣ съ горизонтальнымъ основаніемъ, заключающейся въ вертикальной плоскости и обращенной выпуклостью внизъ.

Хотя и здѣсь интегралъ живой силы существуетъ, тѣмъ не ме-

нѣе въ данномъ случаѣ удобнѣе исходить изъ дифференціальнаго уравненія движенія

$$m\frac{dv}{dt}=\mathbf{F}\cos(\mathbf{F},\mathfrak{T})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

Обозначимъ черезъ s дугу циклоиди, отсчитываемую отъ точки O ($s>0$ вправо отъ точки O, $s<0$ влѣво отъ O), при движеніи точки дуга s или возрастаетъ или убываетъ, въ первомъ случаѣ мы имѣемъ

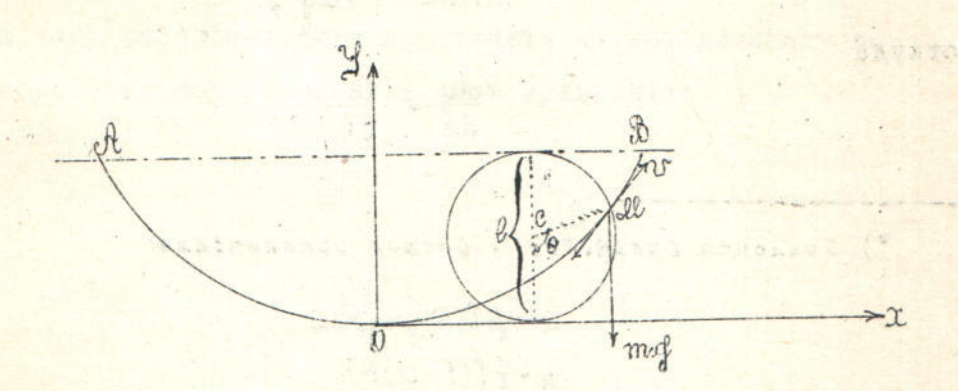
$$v=+\frac{ds}{dt}\ ;$$

во второмъ

$$v=-\frac{ds}{dt}\ ;$$

тогда соотвѣтственно будетъ:

$$\frac{dv}{dt}=\pm\frac{d^2s}{dt^2},$$



Чертежъ 70.

и слѣдовательно, лѣвую часть уравненія (13) можемъ написать въ видѣ:

$$\pm m\frac{d^2s}{dt^2}$$

Правая же часть уравненія будетъ:

$$\mathbf{F}\cos(\mathbf{F},\mathfrak{T})=\mathbf{F}\cos(\mathbf{F},v)=-mg\cos(v,y);$$

но

$$\cos(v,y) = +\frac{dy}{ds},$$

когда при движенiи дуга возрастаетъ, и

$$\cos(v,y) = -\frac{dy}{ds},$$

когда дуга s убываетъ, слѣдовательно:

$$F\cos(F,y) = \pm mg\frac{dy}{ds}.$$

Производную $\frac{dy}{ds}$ найдемъ изъ слѣдующаго уравненiя, выражающаго дугу s циклоиды въ зависимости отъ дiаметра l производящаго круга и ординаты y

$$s^2 = 4.l.y\ ;\ ^{*)}$$

Дифференцируя, находимъ:

$$2.s\,ds = 4.l.dy,$$

откуда

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{2l};$$

---

*) *Циклоида (черт. 70) задается уравненiями:*

$$x = \frac{1}{2}l(\theta + \sin\theta),$$
$$y = \frac{1}{2}l(1 - \cos\theta);$$

отсюда, для дифференцiала дуги по формулѣ:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

находимъ

$$ds = l.\cos\frac{\theta}{2}\cdot d\theta;$$

интегрируя, получаемъ:

$$s = 2.l.\sin\frac{\theta}{2};$$

слѣдовательно

$$s^2 = 4l^2\sin^2\frac{\theta}{2} = 4l.\frac{1}{2}l(1-\cos\theta) = 4.l.y.$$

значитъ:

$$F\cos(F,\mathfrak{J}) = \pm \frac{mg}{2l}\cdot s,$$

и дифференціальное уравненіе движенія (13) можемъ написать въ видѣ

$$\pm m\cdot\frac{d^2s}{dt^2} = \mp \frac{m\cdot g}{2l}\cdot s.$$

Раздѣляя обѣ части этого уравненія при верхнихъ знакахъ (при движеніи дуга s возрастаетъ) на $+m$, а при нижнихъ знакахъ (дуга s убываетъ) на $-m$, мы получимъ для движенія точки какъ вправо, такъ и влѣво, одно и то же уравненіе:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{2l}\cdot s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13')$$

Замѣчаемъ, что совершенно такого же вида дифференціальное уравненіе мы разсмотрѣли уже въ случаѣ прямолинейнаго движенія точки подъ вліяніемъ силы притяженія къ неподвижному центру, пропорціональной разстоянію. Изъ уравненія:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2\cdot x,$$

мы нашли:

$$x = x_0\cos kt + \frac{x_0'}{k}\cdot\sin kt.$$

Интегрируя уравненіе (13'), мы, очевидно, придемъ къ подобному же результату, и поэтому можемъ сразу написать второй интегралъ нашей задачи:

$$s = s_0\cos\sqrt{\frac{g}{2l}}\cdot t + s_0'\sqrt{\frac{2l}{g}}\cdot\sin\sqrt{\frac{g}{2l}}\cdot t.$$

Это уравненіе выражаетъ гармоническое колебаніе точки, амплитуда котораго равна

$$\sqrt{s_0^2 + \frac{2l}{g}\cdot s_0'^2}.$$

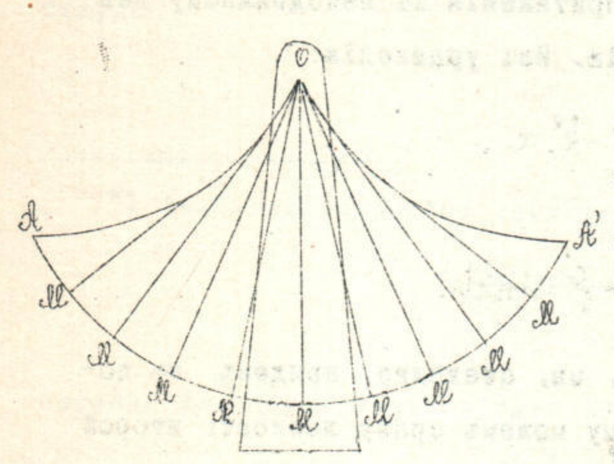
Примемъ крайнее положеніе точки, при которомъ скорость ея равна нулю, за *начальное* положеніе; тогда $s_0' = 0$ и амплитуда $= s_0$, и уравненіе движенія представится въ болѣе простомъ видѣ:

$$s = s_0 . \cos\sqrt{\frac{g}{2l}}\, t\,.$$

Продолжительность *одного размаха* циклоидальнаго маятника будетъ:

$$T = \pi . \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что амплитуда колебаній тяжелой точки на циклоидѣ на продолжительность размаха никакого вліянія не имѣетъ, слѣдовательно, циклоидальный маятникъ совершаетъ *изохронныя колебанія*, тогда какъ колебанія круговаго маятника, какъ было выше указано, не изохронны.



Чертёжъ 71.

Циклоидальный маятникъ былъ построенъ *Гюйгенсомъ;* металлическая изогнутая пластинка AOA' (черт.71) представляетъ развертку циклоиды AMA'; въ точкѣ O прикрѣплена нить OM длины $2l$, на концѣ которой находится тяжелый шарикъ M; при движеніи шарика M нить обертываетъ AOA' и, слѣдовательно, точка M описываетъ циклоиду AMA'.

§ 6. *Равновѣсіе матеріальной точки на гладкой кривой.*

Уравненія равновѣсія точки на гладкой кривой:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y,z)=0,\\ f_2(x,y,z)=0,\end{aligned}\right\}$$

получаются изъ дифференціальныхъ уравненій (2), если положить ускореніе точки равнымъ нулю. Уравненія эти будутъ:

$$X+\frac{R}{\Delta f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{R_2}{\Delta f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x}=0,$$

$$Y+\frac{R}{\Delta f_1}\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{R_2}{\Delta f_2}\frac{\partial f_2}{\partial y}=0,$$

$$Z+\frac{R}{\Delta f_1}\frac{\partial f_1}{\partial z}+\frac{R_2}{\Delta f_2}\frac{\partial f_2}{\partial z}=0.$$

Условія равновѣсія можемъ также получить и изъ уравненія

$$m\frac{dv}{dt}=F_1\cos(F,T);$$

полагая, что $\frac{dv}{dt}=0$, найдемъ

$$F\cos(F,T)=0,$$

откуда слѣдуетъ, что для равновѣсія точки на гладкой кривой необходимо и достаточно, чтобы данная сила, приложенная къ точкѣ, была перпендикулярна къ касательной, т.е., чтобы она заключалась въ нормальной плоскости кривой.

§ 7. *Дифференціальныя уравненія движенія точки по негладкой кривой.*

Когда точка движется по *негладкой* кривой, тогда, кромѣ нормальной реакціи R, на точку будетъ дѣйствовать еще *сила тренія*, направленная по касательной къ кривой въ сторону, про-

тивоположную скорости, и по величинѣ равная абсолютной величинѣ нормальной реакціи, помноженной на коэффиціентъ динамическаго тренія (k).

Принимая во вниманіе силу тренія, мы, на основаніи уравненія (7), получимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія движенія точки по негладкой кривой:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= \mathbf{F}\cos(\mathbf{F},\mathfrak{T}) - k|\mathfrak{R}|, \\ m\frac{v^2}{\rho} &= \mathbf{F}\cos(\mathbf{F},\mathfrak{N}) + \mathfrak{R}\cos(\mathfrak{R},\mathfrak{N}), \\ 0 &= \mathbf{F}\cos(\mathbf{F},\mathfrak{B}) + \mathfrak{R}\cos(\mathfrak{R},\mathfrak{B}). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (14)$$

Такимъ образомъ, сила тренія входитъ только въ первое изъ уравненій движенія (14).

Для положенія *покоя* точки на негладкой кривой мы получимъ три уравненія изъ уравненій (14), полагая $v = 0$ и замѣняя коэффиціентъ динамическаго тренія коэффиціентомъ статическаго тренія.

------- II -------

КИНЕТИКА СИСТЕМЫ ТОЧЕКЪ.

ГЛАВА I.

СИСТЕМА МАТЕРІАЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ.

Системой матеріальныхъ точекъ называется такая совокупность матеріальныхъ точекъ, въ которой движеніе каждой точки зависитъ отъ движеній или положеній *всѣхъ* остальныхъ точекъ*).

Эта зависимость обусловливается *связями*, которыя бываютъ двухъ родовъ: *динамическія и кинематическія*.

Динамическія связи образуются *силами (взаимодѣйствія)*, приложенными къ точкамъ системы.

Примѣръ такой системы, въ которой существуютъ только динамическія связи, представляетъ система изъ двухъ матеріальныхъ точекъ, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Движеніе точки M_1 зависитъ отъ движенія точки M_2, потому что дѣйствующая сила ($\frac{k.m_1 m_2}{r^2}$) по величинѣ и направленію зависитъ отъ положенія точки M_2 ; подобнымъ же образомъ движеніе точки M_2 зависитъ отъ движенія точки M_1 .

Система, подчиненная только динамическимъ связямъ, назы-

---

*) *Согласно этому опредѣленію совокупность, напримѣръ, свободныхъ матеріальныхъ точекъ, подверженныхъ дѣйствію только силы тяжести, не образуетъ системы.*

вается *системою свободныхъ матеріальныхъ точекъ.*

Важнѣйшій примѣръ такой системы представляетъ солнечная система, если солнце, планеты и ихъ спутники будемъ разсматривать, какъ матеріальныя точки.

Кинематическая связь выражается нѣкоторымъ уравненіемъ, которому должны удовлетворять координаты точекъ системы.

Будемъ обозначать точки системы буквами

$$M_1, M_2, M_3, \ldots\ldots M_i, \ldots\ldots M_n \quad ;$$

массы ихъ соотвѣтственно

$$m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_i \ldots m_n \ ,$$

а координаты:

$$x_1, y_1, z_1; \ x_2, y_2, z_2; \ x_3, y_3, z_3; \ldots\ldots x_i, y_i, z_i; \ldots\ldots x_n, y_n, z_n .$$

(n обозначаетъ число точекъ системы), тогда кинематическая связь, которой подчинена система, выражается уравненіемъ, вида

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n) = 0 .$$

Простѣйшій примѣръ системы, въ которой существуетъ кинематическая связь, представляютъ двѣ точки M_1 и M_2 1, соединенныя между собой стержнемъ. Здѣсь имѣемъ слѣдующее уравненіе кинематической связи:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0 .$$

ясно, что движеніе одной точки зависитъ отъ движенія другой точки*).

---

*) *Замѣтимъ, что кинематическая связь можетъ выражаться уравненіемъ, соединеннымъ съ неравенствомъ. Примѣръ такой связи представляетъ гибкая нить, связывающая двѣ точки: въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть:*

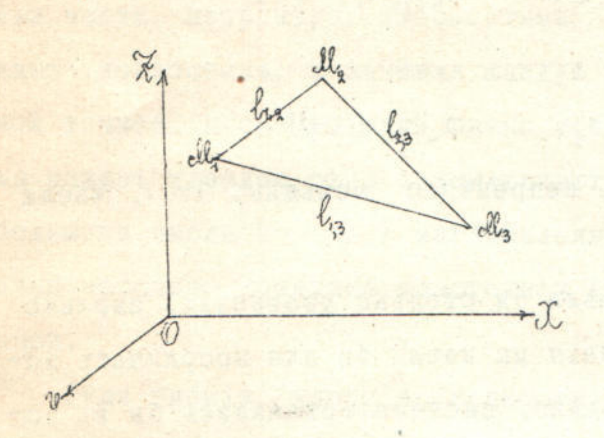
$$l^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] \geqslant 0,$$

гдѣ l *длина нити.*

Далѣе, замѣтимъ, что уравненія связей могутъ содержать вре-

Система, въ которой разстоянiе между каждыми двумя точками остается постояннымъ, называется *неизмѣняемой*.

Пусть неизмѣняемая система состоитъ изъ трехъ точекъ M_1, M_2, M_3, соединенныхъ между собою стержнями $l_{1,2}$, $l_{2,3}$, $l_{3,1}$ (черт. 72); для этой системы существуютъ три кинематическiя связи:



Чертежъ 72.

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-l_{1,2}^2=0\,,$$

$$(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2-l_{1,3}^2=0\,,$$

$$(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2-l_{2,3}^2=0\,.$$

Легко видѣть, что прибавляя къ системѣ изъ трехъ точекъ послѣдовательно по одной точкѣ, мы должны, для того, чтобы система оставалась неизмѣняемой, каждую новую точку соединить стержнями съ тремя изъ предыдущихъ; такимъ образомъ, присоединенiе каждой точки къ неизмѣняемой системѣ увеличиваетъ число кинематическихъ связей на три.

Если имѣемъ неизмѣняемую систему изъ n точекъ, то первыя три изъ нихъ даютъ три кинематическiя связи, а остальныя $(n-3)$ точки даютъ $3(n-3)$ связей, всего, значитъ, будетъ $(3n-6)$ связей. Отсюда слѣдуетъ, что число кинематическихъ связей, необходимыхъ для того, чтобы система была неизмѣняемой, *на шесть* менѣе числа координатъ всѣхъ точекъ системы.

мя t; такой примѣръ представляютъ двѣ матерiальныя точки, связанныя стержнемъ, который удлиняется пропорцiонально времени, такъ что:

$$l=a+bt\,,$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-(a+bt)^2=0$$

Въ системѣ матеріальныхъ точекъ можетъ существовать вообще k кинематическихъ связей:

$$f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n) = 0 ,$$

$$f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n) = 0 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

$$f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n) = 0 .$$

причемъ число k должно быть непремѣнно меньшимъ $3n$, числа координатъ точекъ системы.

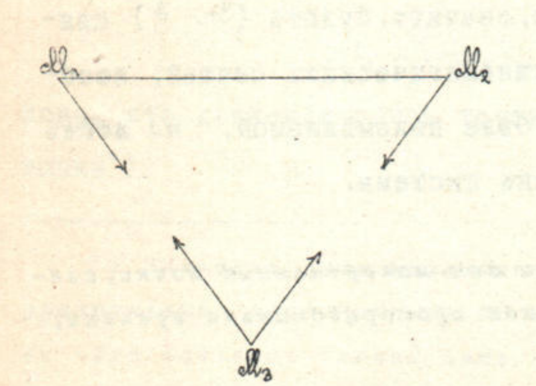
Если бы $k = 3n$, то мы имѣли бы столько уравненій, сколько координатъ; рѣшая эти уравненія мы нашли бы для координатъ постоянныя значенія; слѣдовательно, система оставалась бы въ покоѣ, а не двигалась.

Если бы $k > 3n$, то нѣкоторыя изъ уравненій связей были бы слѣдствіемъ остальныхъ или противорѣчили бы имъ.

Въ случаѣ неизмѣняемой системы мы имѣемъ:

$k = 3n - 6$ связей.

Замѣтимъ, что существуютъ системы, подчиненныя одновременно и динамическимъ и кинематическимъ связямъ; такой примѣръ представляютъ три матеріальныя точки, изъ которыхъ двѣ, связанныя стержнемъ, притягиваютъ третью и сами къ ней притягиваются по закону Ньютона (черт. 73). Система, подчиненная кинематическимъ связямъ, называется *системою несвободныхъ матеріальныхъ точекъ*.



Чертежъ 73.

Весьма важный случай (частный) системы несвободныхъ матеріальныхъ точекъ, именно,

неизмѣняемую систему, представляетъ *твердое тѣло.*

Въ самомъ дѣлѣ, въ Механикѣ твердымъ тѣломъ называется такое тѣло, въ которомъ разстояніе между каждыми двумя точками остается неизмѣннымъ; раздѣляя твердое тѣло на безконечно малыя части, напримѣръ, плоскостями, параллельными координатнымъ плоскостямъ, и замѣняя каждую изъ этихъ частей матеріальной точкой, масса которой равна массѣ соотвѣтствующей части, мы можемъ твердое тѣло разсматривать какъ систему безконечно большого числа ($n = \infty$) матеріальныхъ точекъ съ безконечно малыми массами, взаимныя разстоянія которыхъ остаются неизмѣнными.

Тѣла гибкія, упругія, жидкости, газы и, вообще, всѣ тѣла природы и ихъ совокупности также могутъ быть разсматриваемы, какъ частные виды системы матеріальныхъ точекъ; поэтому *предложенія кинетики системы имѣютъ общее значеніе для всѣхъ тѣлъ природы.*

Замѣтимъ, что и одна матеріальная точка, движеніе которой мы изучали, можетъ быть разсматриваема какъ частный случай системы, при $n = 1$.

ГЛАВА II.

ДВИЖЕНІЕ СИСТЕМЫ СВОБОДНЫХЪ МАТЕРІАЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ.

§ 1. *Дифференціальныя уравненія движенія.*

Пусть дана система, состоящая изъ n свободныхъ матеріальныхъ точекъ:

$$M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots\ldots\ldots M_n .$$

Кромѣ силъ, необходимыхъ для того, чтобы точки образовали систему, къ точкамъ могутъ быть приложены всякія другія силы. Очевидно, всѣ силы, приложенныя къ какой-либо точкѣ, можемъ замѣнить одной силой: ихъ равнодѣйствующей.

Пусть эти равнодѣйствующія, приложенныя къ точкамъ системы, соотвѣтственно будутъ:

$$F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots\ldots F_n;$$

а проекціи ихъ на координатныя оси:

$$X_1 Y_1 Z_1, X_2 Y_2 Z_2, X_3 Y_3 Z_3, \ldots\ldots X_n Y_n Z_n.$$

Мы видѣли, что въ случаѣ одной матеріальной точки сила, къ ней приложенная, а слѣдовательно, и проекціи ея зависятъ, вообще говоря, отъ времени, отъ положенія и скорости точки. Въ случаѣ же системы матеріальныхъ точекъ (какъ это слѣдуетъ изъ самаго опредѣленія системы) равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ каждой точкѣ, зависитъ не только отъ времени и отъ положенія и скорости этой точки, но также отъ положеній и скоростей другихъ точекъ, - по крайней мѣрѣ, отъ положенія или скорости одной изъ другихъ точекъ. Такимъ образомъ, проекціи равнодѣйствующихъ F_1, F_2, F_3, ... F_n суть, вообще говоря, функція отъ $6n+1$ перемѣнныхъ: t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ... $x_n, y_n, z_n, x_1', y_1', z_1'$ .... x_n', y_n', z_n'

Примѣняя основныя начала кинетики къ каждой точкѣ системы, мы получимъ для каждой изъ нихъ три дифференціальныя уравненія движенія, взявши точку съ указателемъ i, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} &= X_i, \\ m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} &= Y_i, \\ m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} &= Z_i. \end{aligned}\right\}$$

Придавая указателю i послѣдовательно значенія: 1, 2, 3, n, получимъ $3n$ *дифференціальныхъ уравненій движенія* системы свободныхъ матеріальныхъ точекъ:

$$m_1x_1''=X_1,\ m_1y_1''=Y_1,\ m_1z_1''=Z_1,\ m_2x_2''=X_2,\ m_2y_2''=Y_2, \ldots\ldots m_nz_n''=Z_n \ldots (A)$$

Такимъ образомъ, опредѣленіе движенія системы свободныхъ точекъ при дѣйствіи данныхъ силъ приводится къ интегрированію системы $3n$ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка.

Для рѣшенія этой задачи нужно найти $6n$ интеграловъ уравненій (A): $3n$ первыхъ и $3n$ вторыхъ интеграловъ, содержащихъ $6n$ постоянныхъ произвольныхъ.

Первые интегралы будутъ равенства вида:

$$\Phi_j(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \ldots z_n, x_1', y_1', z_1', x_2' y_2' \ldots z_n', t) = C_j,$$

гдѣ $j = 1, 2, 3, \ldots\ldots 3n$; вторые интегралы:

$$\Psi_j(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \ldots z_n, x_1', y_1', z_1', x_2', y_2' \ldots z_n', t, C_1, C_2 \ldots C_n) = D_j,$$

гдѣ $j = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots 3n$, и

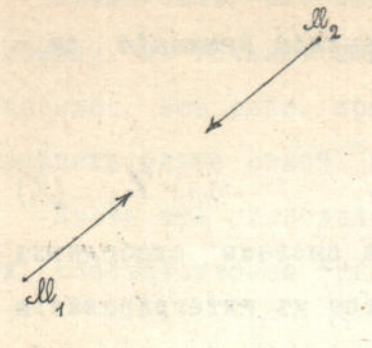
$$C_1, C_2, C_3, \ldots C_{3n}, D_1, D_2, \ldots\ldots D_{3n})$$

обозначаютъ постоянныя произвольныя.

Эти постоянныя опредѣляемъ, зная начальныя положенія и начальныя скорости точекъ системы, которыя могутъ быть заданы какъ угодно.

§ 2. *Задача двухъ тѣлъ.*

Разсмотримъ *движеніе системы, состоящей изъ двухъ свободныхъ точекъ M_1 и M_2, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.*



Чертежъ 74.

Важнѣйшій случай такого движенія представляетъ движеніе солнца и земли, если не принимать во вниманіе силъ притяженія отъ другихъ тѣлъ солнечной системы.

Пусть массы точекъ будутъ соотвѣтственно m_1 и m_2, а координаты x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2; тогда величина дѣйствующихъ силъ равна:

$$\frac{k^2 \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

гдѣ

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\,.$$

Замѣчая, что cosinus'ы угловъ, образуемыхъ направленіемъ силъ, съ осями координатъ равны:

$$\pm\frac{x_2 - x_1}{r}\,,\quad \pm\frac{y_2 - y_1}{r}\,,\quad \pm\frac{z_2 - z_1}{r}\,,$$

гдѣ знакъ + соотвѣтствуетъ силѣ, приложенной къ точкѣ M_1, а знакъ − силѣ, приложенной къ точкѣ M_2, мы получимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія движенія системы:

$$\left.\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -\frac{k^2 \cdot m_1 m_2}{r^3}(x_1 - x_2),\\ m_1 \cdot y_1'' &= -\frac{k^2 \cdot m_1 \cdot m_2}{r^3}\cdot(y_1 - y_2),\\ m_1 \cdot z_1'' &= -\frac{k^2 \cdot m_1 \cdot m_2}{r^3}\cdot(z_1 - z_2). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\left.\begin{aligned} m_2 \cdot x_2'' &= -\frac{k^2 \cdot m_1 m_2}{r^3}\cdot(x_2 - x_1),\\ m_2 y_2'' &= -\frac{k^2 \cdot m_1 \cdot m_2}{r^3}\cdot(y_2 - y_1),\\ m_2 \cdot z_2'' &= -\frac{k^2 \cdot m_1 \cdot m_2}{r^3}\cdot(z_2 - z_1), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1_1)$$

Посредствомъ сложенія получимъ изъ уравненій (1) и (1_1):

$$\left.\begin{aligned} m_1 x_1'' + m_2 x_2'' &= 0, \\ m_1 y_1'' + m_2 y_2'' &= 0, \\ m_1 z_1'' + m_2 z_2'' &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Интегрируя каждое изъ уравненій (2), найдемъ три первыхъ интеграла:

$$\left.\begin{aligned} m_1 x_1' + m_2 x_2' &= C_1, \\ m_1 y_1' + m_2 y_2' &= C_2, \\ m_1 z_1' + m_2 z_2' &= C_3. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 постоянныя произвольныя.

Интегрируя каждое изъ уравненій (3), найдемъ три вторыхъ интеграла:

$$\left.\begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 &= C_1 t + D_1, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 &= C_2 t + D_2, \\ m_1 z_1 + m_2 z_2 &= C_3 t + D_3. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

гдѣ D_1, D_2, D_3 - постоянныя произвольныя.

Шесть постоянныхъ произвольныхъ C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3 опредѣляются по начальнымъ даннымъ.

Обозначимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} &= x_c, \\ \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} &= y_c, \\ \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} &= z_c. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Геометрическая точка, опредѣляемая координатами x_c, y_c, z_c, дѣлитъ разстояніе $M_1 M_2$ на части обратно пропорціональныя массамъ m_1 и m_2 - она называется *центромъ инерціи* раз-

сматриваемой системы *).

На основаніи уравненій (5) и (3) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} x'_c &= \frac{C_1}{m_1+m_2}, \\ y'_c &= \frac{C_2}{m_1+m_2}, \\ z'_c &= \frac{C_3}{m_1+m_2}. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Уравненія (6) показываютъ, что скорость центра инерціи разсматриваемой системы постоянна по величинѣ и направленію, отсюда заключаемъ, что центръ инерціи движется прямолинейно и равномѣрно; если начальныя скорости точекъ таковы, что постоянныя $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, тогда центръ инерціи остается въ покоѣ.

Изъ уравненій (5) и (4) слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{C_1}{m_1+m_2}t + \frac{D_1}{m_1+m_2}, \\ y_c &= \frac{C_2}{m_1+m_2}t + \frac{D_2}{m_1+m_2}, \\ z_c &= \frac{C_3}{m_1+m_2}t + \frac{D_3}{m_1+m_2}. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Если хоть одна изъ постоянныхъ C_1 , C_2 , C_3 не равна нулю, уравненія (6) выражаютъ прямолинейное и равномѣрное движеніе центра инерціи системы.

Перенесемъ начало координатъ въ центръ инерціи, не измѣняя направленія координатныхъ осей. Если новыя координаты точекъ

---

*) *Замѣтимъ, что если бы M_1 и M_2 были точки тяжелыя, то координаты x_c , y_c , z_c опредѣляли бы ихъ центръ тяжести, и слѣдовательно, центръ тяжести двухъ точекъ совпадаетъ съ ихъ центромъ инерціи.*

M_1 и M_2 обозначимъ соотвѣтственно черезъ ξ_1, η_1, ζ_1 и ξ_2, η_2, ζ_2, то будемъ имѣть:

$$x_1 = x_c + \xi_1,$$
$$y_1 = y_c + \eta_1,$$
$$z_1 = z_c + \zeta_1;$$

и

$$x_2 = x_c + \xi_2,$$
$$y_2 = y_c + \eta_2,$$
$$z_2 = z_c + \zeta_2.$$

Принимая во вниманіе, что ускореніе центра инерціи равно нулю, и, слѣдовательно, $x_c'' = y_c'' = z_c'' = 0$, получаемъ изъ уравненій (1) и (1_1) дифференціальныя уравненія движенія системы въ новыхъ координатахъ:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot \xi_1'' &= -\frac{k^2 \cdot m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot (\xi_1 - \xi_2), \\ m_1 \cdot \eta_1'' &= -\frac{k^2 \cdot m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot (\eta_1 - \eta_2), \\ m_1 \cdot \zeta_1'' &= -\frac{k^2 \cdot m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot (\zeta_1 - \zeta_2). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1')$$

и

$$\left.\begin{aligned} m_2 \cdot \xi_2'' &= -\frac{k^2 \cdot m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot (\xi_2 - \xi_1), \\ m_2 \cdot \eta_2'' &= -\frac{k^2 \cdot m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot (\eta_2 - \eta_1), \\ m_2 \cdot \zeta_2'' &= -\frac{k^2 \cdot m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot (\zeta_2 - \zeta_1). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1_1')$$

Въ уравненіяхъ ($1'$) и ($1_1'$)

$$r = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}.$$

На основаніи уравненій (5) находимъ:

$$(m_1+m_2)\cdot x_c = m_1\cdot(x_c+\xi_1)+m_2(x_c+\xi_2),$$

$$(m_1+m_2)\cdot y_c = m_1\cdot(y_c+\eta_1)+m_2\cdot(y_c+\eta_2),$$

$$(m_1+m_2)\cdot z_c = m_1\cdot(z_c+\zeta_1)+m_2\cdot(z_c+\zeta_2);$$

откуда получаемъ уравненія, выражающія связь между новыми координатами точекъ M_1 и M_2:

$$\left.\begin{aligned} m_1\cdot\xi_1 + m_2\cdot\xi_2 = 0\,, \\ m_1\cdot\eta_1 + m_2\cdot\eta_2 = 0\,, \\ m_1\cdot\zeta_1 + m_2\cdot\zeta_2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Изъ уравненій (8) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 = -\frac{m_2}{m_1}\cdot\xi_2\,, \\ \eta_1 = -\frac{m_2}{m_1}\eta_2\,, \\ \zeta_1 = -\frac{m_2}{m_1}\cdot\zeta_2\,. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (8')$$

и

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 = -\frac{m_1}{m_2}\cdot\xi_1\,, \\ \eta_2 = -\frac{m_1}{m_2}\cdot\eta_1\,, \\ \zeta_2 = -\frac{m_1}{m_2}\cdot\zeta_1\,. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (8'')$$

Подставляя въ уравненія (1') вмѣсто координатъ точки M_2 ихъ выраженія черезъ координаты точки M_1 изъ уравненій (8'), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} m_1\cdot\xi_1' = -\frac{k^2\cdot m_1\cdot(m_1+m_2)}{r^3}\cdot\xi_1\,, \\ m_1\cdot\eta_1' = -\frac{k^2\cdot m_1(m_1+m_2)}{r^3}\cdot\eta_1\,, \\ m_1\cdot\zeta_1' = -\frac{k^2\cdot m_1(m_1+m_2)}{r^3}\cdot\zeta_1\,. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1'')$$

гдѣ

$$r=\sqrt{\left(\xi_1+\frac{m_1}{m_2}\cdot\xi_1\right)^2+\left(\eta_1+\frac{m_1}{m_2}\cdot\eta_1\right)^2+\left(\zeta_1+\frac{m_1}{m_2}\cdot\zeta_1\right)^2}=\frac{m_1+m_2}{m_2}\cdot\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2}$$

Очевидно, $\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2}$ есть разстояніе точки M_1 отъ центра инерціи (начала координатъ); обозначимъ его черезъ ρ_1; тогда

$$r=\frac{m_1-m_2}{m_2}\,\rho_1\,,$$

и уравненія (1") примутъ видъ:

$$m_1\cdot\xi_1''=-\frac{k^2\cdot m_1\cdot m_2^3}{(m_1+m_2)^2}\cdot\frac{\xi_1}{\rho_1^3},$$

$$m_1\cdot\eta_1''=-\frac{k^2\cdot m_1\cdot m_2^3}{(m_1+m_2)^2}\cdot\frac{\eta_1}{\rho_1^3},$$

$$m_1\cdot\zeta_1''=-\frac{k^2\cdot m_1\cdot m_2^3}{(m_1+m_2)^2}\cdot\frac{\zeta_1}{\rho_1^3}$$

Сокращая эти уравненія на m_1 и обозначая коэффиціентъ $\frac{k^2\cdot m_2^3}{(m_1+m_2)^2}$ черезъ k_1, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1''&=-\frac{k_1\cdot\xi_1}{\rho_1^3},\\ \eta_1''&=-\frac{k_1\cdot\eta_1}{\rho_1^3},\\ \zeta_1''&=-\frac{k_1\cdot\zeta_1}{\rho_1^3}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(9)$$

Поступая совершенно подобнымъ же образомъ съ уравненіями $(1_1')$, т. е. подставляя въ нихъ вмѣсто координатъ точки M_1 ихъ выраженія изъ уравненій (8") черезъ координаты точки M_2 и обозначая затѣмъ разстояніе $\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2}$ точки M_2 отъ центра инерціи (начала координатъ) черезъ ρ_2, получимъ:

$$m_2\cdot\xi_2''=-\frac{k^2\cdot m_2\cdot m_1^3}{(m_1+m_2)^2}\cdot\frac{\xi_2}{\rho_2^3},$$

$$m_2\eta_2'' = -\frac{k^2 \cdot m_2 \cdot m_1^3}{(m_1+m_2)^2} \cdot \frac{\eta_2}{\rho_2^3},$$

$$m_2\zeta_2'' = -\frac{k^2 \cdot m_2 \cdot m_1^3}{(m_1+m_2)^2} \cdot \frac{\zeta_2}{\rho_2^3},$$

откуда, вводя обозначеніе

$$\frac{k^2 m_1^3}{(m_1+m_2)^2} = k_2,$$

имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \xi_2'' &= -\frac{k_2 \cdot \xi_2}{\rho_2^3}, \\ \eta_2'' &= -\frac{k_2 \cdot \eta_2}{\rho_2^3}, \\ \zeta_2'' &= -\frac{k_2 \cdot \zeta_2}{\rho_2^3}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Полученныя нами уравненія (9) и (10), показываютъ, что точки M_1 и M_2 совершаютъ относительно ихъ центра инерціи такія движенія, какія совершаютъ двѣ точки, притягиваемыя къ *неподвижному* началу координатъ: первая силою:

$$F_1 = \frac{k_1 \cdot m_1}{\rho_1^2}$$

вторая силою:

$$F_2 = \frac{k_2 \cdot m_2}{\rho_2^2}.$$

Такимъ образомъ, наша задача свелась къ двумъ задачамъ - каждая о движеніи *одной* точки, притягиваемой къ *неподвижному* центру по закону Ньютона; а эту задачу мы уже подробно изслѣдовали въ курсѣ Кинетики точки.

Пользуясь интеграломъ живой силы и интеграломъ площадей, мы тамъ нашли, что движеніе точки, притягиваемой по закону Ньютона, совершается по коническому сѣченію.

Изъ всего вышеизложеннаго можемъ сдѣлать слѣдующее заключеніе: при движеніи двухъ точекъ, взаимнопритягивающихся по

закону Ньютона, центръ инерціи ихъ движется прямолинейно и равномѣрно, - въ частномъ случаѣ остается въ покоѣ, а каждая точка описываетъ около центра инерціи коническое сѣченіе такимъ же образомъ, какъ если бы центръ инерціи былъ неподвиженъ и притягивалъ точку по закону Ньютона.

Такимъ образомъ, въ вышеупомянутомъ случаѣ системы, состоящей изъ *земли и солнца,* какъ земля, такъ и солнце описываютъ эллипсы вокругъ ихъ центра инерціи, принимая во вниманіе, что масса солнца въ 327.000 разъ болѣе массы земли, а среднее разстояніе земли отъ солнца равно 149×10^6 километровъ, мы найдемъ, что центръ инерціи системы будетъ отстоять отъ центра солнца всего на 460 килом., поэтому размѣры эллиптической орбиты солнца столь малы по сравненію съ размѣрами эллиптической орбиты земли, что во многихъ случаяхъ мы можемъ считать солнце неподвижнымъ.

Разсмотрѣнная нами задача представляется и тогда, когда мы опредѣляемъ движенія *земли и луны* подъ вліяніемъ ихъ взаимнаго притяженія, масса земли только въ 81 разъ болѣе массы луны и ихъ взаимное разстояніе измѣняется отъ 407.000 до 357.000 километровъ.

ГЛАВА III.

ДВИЖЕНІЕ СИСТЕМЫ НЕСВОБОДНЫХЪ МАТЕРІАЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ.

§ 1. *Кинематическія связи; условія для скорости и ускоренія.*

Мы видѣли, что система n несвободныхъ матеріальныхъ точекъ подчинена, по крайней мѣрѣ, одной кинематической связи

выражаемой уравненіемъ вида:

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots\ldots x_n, y_n, z_n) = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Такихъ кинематическихъ связей система можетъ имѣть вообще k, причемъ $k < 3n$ *).

Число $3n - k$ называется *числомъ степеней свободы* системы; такъ, напримѣръ, свободное твердое тѣло имѣетъ *шесть* степеней свободы: $3n - (3n - 6) = 6$ твердое тѣло, одна точка котораго неподвижна, имѣетъ три степени свободы; твердое тѣло, имѣющее неподвижную ось, обладаетъ только одной степенью свободы.

Существованіе кинематической связи влечетъ за собою два *условія:* одному должны удовлетворять *скорости*, а другому *ускоренія* точекъ системы.

Чтобы вывести эти условія, замѣтимъ, что когда мы въ уравненіе (1) кинематической связи подставимъ вмѣсто координатъ точекъ ихъ выраженія въ функціяхъ времени, то это уравненіе должно обратиться въ тождество, а если функція тождественно равна нулю, то и всѣ ея производныя по времени равны нулю:

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dt^2} = 0, \quad \text{и т.д.}$$

Раскрывая первую производную, получимъ *условіе*, которому должны удовлетворять проекціи *скоростей* точекъ системы:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial f}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f}{\partial z_1} z_1' + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2' + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial z_n} z_n' = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i' + \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial f}{\partial z_i} z_i' \right) = 0, \ldots\ldots\ldots (2)$$

---

*) *Нѣтъ необходимости въ томъ, чтобы всѣ $3n$ координатъ входили въ каждое изъ k уравненій связей; возможно, напримѣръ, что координата x_1 входитъ только въ одно изъ этихъ уравненій: нѣкоторыя координаты могутъ не входить ни въ одно изъ уравненій связей.*

гдѣ $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$.

Раскрывая вторую производную $\frac{d^2 f}{dt^2}$, получимъ *условіе*, которому должны удовлетворять проекціи *ускореній* точекъ системы

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_1'' + \frac{\partial f}{\partial y_1} y_1'' + \frac{\partial f}{\partial z_1} z_1'' + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_2'' + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial z_n} \cdot z_n'' + f^{(2)} = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i'' + \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot y_i'' + \frac{\partial f}{\partial z_i} \cdot z_i'' \right) + f^{(2)} = 0, \ldots\ldots\ldots (3)$$

гдѣ $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$, а $f^{(2)}$ обозначаетъ совокупность остальныхъ членовъ выраженія второй производной: $f^{(2)}$ есть функція второй степени относительно проекцій скоростей точекъ системы; символически функція $f^{(2)}$ можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\left[\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot x_i' + \frac{\partial}{\partial y_i} \cdot y_i' + \frac{\partial}{\partial z_i} \cdot z_i' \right) \right]^2 \cdot f,$$

если условиться, что послѣ возвышенія въ квадратъ и умноженія на f ... $\partial^2 f$ будетъ обозначать вторую частную производную отъ функціи f.

Если система подчинена k кинематическимъ связямъ, то будутъ существовать k условій вида (2) для проекцій скоростей и k условій вида (3) для проекцій ускореній точекъ системы.

§ 2. *Общія уравненія движенія системы несвободныхъ матеріальныхъ точекъ.*

Такъ какъ кинематическая связь заставляетъ ускоренія точекъ системы удовлетворять нѣкоторому условію, то она должна оказывать на каждую точку системы нѣкоторую силу, называемую *реакціей* связи.

Въ самомъ дѣлѣ, ускоренія точекъ системы зависятъ отъ дѣйствующихъ силъ, но задаваемыя силы, приложенныя къ точкамъ,

могутъ быть такія, что при дѣйствіи ихъ однѣхъ ускоренія, определяемыя изъ уравненій ($\mathcal{A}$) стр. 229, не будутъ удовлетворять условію (3), а въ такомъ случаѣ необходимо допустить существованіе со стороны кинематической связи силъ (реакцій), при дѣйствіи которыхъ, въ совокупности съ задаваемыми силами, точки системы получаютъ ускоренія, удовлетворяющія условію (3).

Если имѣется k кинематическихъ связей, то въ каждой точкѣ системы, кромѣ задаваемыхъ силъ, приложены еще k реакцій этихъ связей.

Присоединяя къ даннымъ силамъ реакціи связей, мы можемъ разсматривать каждую точку системы, какъ свободную, и примѣнять къ каждой изъ нихъ основныя начала кинетики.

Обозначимъ курсивной буквой $\mathcal{F}_i$ равнодѣйствующую данныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ M_i, и реакцій всѣхъ связей на точку M_i, а проекціи этой равнодѣйствующей курсивными буквами: $\mathcal{X}_i$, $\mathcal{Y}_i$, $\mathcal{Z}_i$; тогда для каждой изъ точекъ системы можемъ написать три дифференціальныя уравненія движенія вида*):

$$\left.\begin{aligned} m_i . x_i'' &= \mathcal{X}_i , \\ m_i . y_i'' &= \mathcal{Y}_i , \\ m_i . z_i'' &= \mathcal{Z}_i . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathcal{B})$$

Придавая указателю i послѣдовательно значенія 1, 2, 3, ... n, получимъ $3n$ дифференціальныхъ уравненій движенія системы несвободныхъ матеріальныхъ точекъ.

---

*) *Вводимъ курсивныя буквы для того, чтобы равнодѣйствующую данныхъ силъ и реакцій, приложенныхъ къ точкѣ M_i ясно отличить отъ равнодѣйствующей однѣхъ данныхъ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ.*

§ 3. *"Возможныя перемѣщенія"* или *"виртуальныя отклоненія"* *точекъ системы.*

Въ кинетикѣ точки мы различали поверхности *гладкія* (безъ тренія) и поверхности *негладкія* (съ треніемъ); подобнымъ же образомъ и въ кинетикѣ системы точекъ мы можемъ раздѣлить связи на два класса: связи *идеальныя* и связи съ *треніемъ*.

Чтобы установить различіе между связями этихъ двухъ классовъ введемъ новое понятіе о *"возможныхъ перемѣщеніяхъ"* или *"виртуальныхъ отклоненіяхъ"* точекъ системы

"Возможное перемѣщеніе" или *"виртуальное отклоненіе"* *свободной* матеріальной точки есть всякій безконечно малый векторъ, представляющій безконечно малое отклоненіе точки отъ положенія, ею занимаемаго.

"Возможное перемѣщеніе" точки M (x, y, z), будемъ обозначать черезъ δs, а проекціи его на координатныя оси черезъ δx, δy, δz (черт.75). Въ случаѣ *свободной* точки безконечно малыя величины: δx, δy, δz, произвольны.

Чертежъ 75.

Если же точка находится на *поверхности* $f(x,y,z)=0$ (черт. 76), то *"возможнымъ перемѣщеніемъ"* мы называемъ такое безконечно малое перемѣщеніе, проекціи котораго удовлетворяютъ уравненію:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0 .$$

Раздѣляя обѣ части этого уравненія на

$$\Delta f = +\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

и замѣчая, что cosinus'ы угловъ, образуемыхъ нормалью $\mathcal{N}$ къ поверхности съ осями координатъ, равны:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f}, \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f}, \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta f}$$

получимъ:

$$\delta x . \cos(\mathcal{N}, X) + \delta y . \cos(\mathcal{N}, Y) + \delta z . \cos(\mathcal{N}, Z) = 0;$$

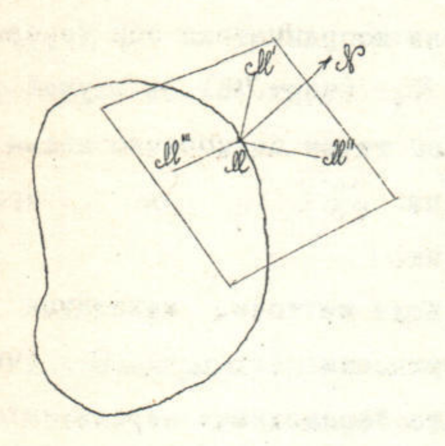
откуда слѣдуетъ, что

$$\delta s . \cos(\delta s, \mathcal{N}) = 0,$$

т.е., что

$$\delta s \perp \mathcal{N}.$$

Такимъ образомъ *"возможное перемѣщеніе"* точки, находящейся на поверхности, есть всякое безконечно - малое отклоненіе отъ положенія, ею занимаемаго, въ *касательной плоскости.*



Чертежъ 76.

Когда точка находится на *кривой* линіи, уравненія которой:

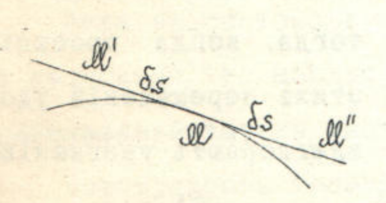
$$f_1(x, y, z) = 0,$$
$$f_2(x, y, z) = 0,$$

то *"возможнымъ перемѣщеніемъ"* точки мы называемъ такое безконечно-малое перемѣщеніе, проекціи котораго удовлетворяютъ двумъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \cdot \delta z = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \cdot \delta z = 0. \end{aligned}\right\}$$

Эти два уравненія выражаютъ, что *"возможное перемѣщеніе"* должно составлять прямые углы съ нормалями къ обѣимъ поверхностямъ, опредѣляющимъ кривую; слѣдовательно, "возможное перемѣщеніе" точки, находящейся на кривой, есть всякое безконечно малое отклоненіе отъ положенія, ею занимаемаго, *по касательной къ кривой* (черт.77).

Очевидно, что перемѣщеніе δs точки, находящейся на поверхности или на кривой, строго говоря, не есть *возможное* перемѣщеніе*), поэтому δs часто называютъ иначе: *"виртуальнымъ отклоненіемъ"* точки; но погрѣшность, которую мы дѣлаемъ, считая это перемѣщеніе возможнымъ, будетъ безконечно малою величиною не ниже второго порядка.



Чертежъ 77.

Пусть имѣемъ систему точекъ, связанныхъ кинематической связью:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n) = 0 .$$

Обозначимъ безконечно малыя перемѣщенія: точки M_1 черезъ δs_1; его проекціи черезъ δx_1, δy_1, δz_1, — точки M_2 черезъ δs_2 и его проекціи черезъ δx_2, δy_2, δz_2, и т.д.; наконецъ, точки M_n черезъ δs_n и его проекціи черезъ δx_n, δy_n, δz_n.

Въ томъ случаѣ, когда точки системы свободны, каковы бы ни были эти безконечно-малыя перемѣщенія, мы называемъ ихъ

---

*) *Въ случаѣ поверхности мы имѣемъ:*

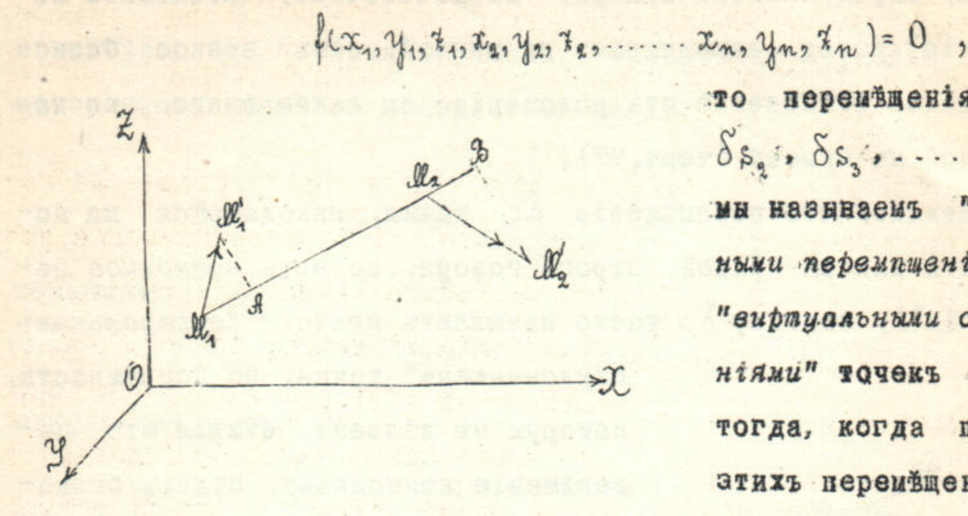
$$f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot\delta z^2 +$$

$$+ 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\cdot\partial y}\cdot\delta x\delta y + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z\cdot\partial x}\cdot\delta z\cdot\delta x + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\cdot\partial z}\cdot\delta y\cdot\delta z\Big) + \text{члены 3}^{\text{го}}\text{ и высш. порядк.};$$

указанные члены и выражаютъ величину того нарушенія данной связи, которымъ мы пренебрегаемъ, разсматривая возможное перемѣщеніе точки, находящейся на поверхности.

"возможными перемпщеніями" или *"виртуальными отклоненіями"*. Если же система *несвободна*, именно подчинена одной кинематической связи:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n) = 0\,,$$



Чертежъ 78.

то перемѣщенія: δs_1, δs_2, δs_3, ... δs_n мы называемъ *"возможными перемпщеніями"* или *"виртуальными отклоненіями"* точекъ системы тогда, когда проекціи этихъ перемѣщеній удовлетворяютъ уравненію:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial f}{\partial z_1}\delta z_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial f}{\partial y_2}\delta y_2+\frac{\partial f}{\partial z_2}\delta z_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}\delta x_3+\ldots\ldots+\frac{\partial f}{\partial z_n}\delta z_n=0.$$

или короче:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Для примпра возьмемъ систему, состоящую изъ двухъ точекъ M_1 и M_2, связанныхъ стержнемъ длины l (черт. 78). Уравненіе кинематической связи:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-l^2=0.$$

Проекціи *"возможныхъ перемпщеній"* точекъ M_1 и M_2, согласно уравненію (4), должны удовлетворять уравненію:

$$-(x_2-x_1).\delta x-(y_2-y_1)\delta y_1-(z_2-z_1).\delta z_1+(x_2-x_1).\delta x_2+(y_2-y_1)\delta y_2+(z_2-z_1)\delta z_2=0; \quad (4')$$

откуда:

$$(x_2-x_1).\delta x_1+(y_2-y_1).\delta y_1+(z_2-z_1)\delta z_1=(x_2-x_1)\delta x_2+(y_2-y_1)\delta y_2+(z_2-z_1).\delta z_2\,.$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на l.

Такъ какъ множители

$$\frac{x_2-x_1}{l},\ \frac{y_2-y_1}{l},\ \frac{z_2-z_1}{l},$$

равны cosinus'амъ угловъ, которые прямая M_1M_2 составляетъ съ осями координатъ, то изъ уравненія (4) имѣемъ:

$$\delta s_1 \cdot \cos(\delta s_1, M_1M_2) = \delta s_2 \cdot \cos(\delta s_2, M_1M_2).$$

Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ *"возможныя перемѣщенія"* точекъ M_1 и M_2 будутъ всякія безконечно - малыя перемѣщенія, проекціи которыхъ на направленіе стержня равны между собою.

Если въ системѣ существуетъ не одна кинематическая связь, а *нѣсколько*, то каждая изъ нихъ даетъ для проекцій *возможныхъ перемѣщеній* точекъ системы условіе вида (4) *).

Совокупность *"возможныхъ перемѣщеній"* или *"виртуальныхъ отклоненій"* точекъ системы образуетъ *"возможное перемѣщеніе"* или *"виртуальное отклоненіе"* самой системы.

"Возможнымъ перемѣщеніемъ" или *"виртуальнымъ отклоненіемъ"* *свободнаго* твердаго тѣла, которое мы разсматриваемъ, какъ неизмѣняемую систему матеріальныхъ точекъ, будетъ всякое безконечно малое отклоненіе тѣла отъ положенія, имъ занимаемаго.

Если твердое тѣло имѣетъ неподвижную точку, тогда *"возможнымъ перемѣщеніемъ"* будетъ поворотъ на безконечно малый уголъ, вокругъ любой оси, проходящей черезъ неподвижную точку.

Если тѣло имѣетъ неподвижную ось, тогда *"возможное перемѣщеніе"* будетъ поворотъ на безконечно малый уголъ вокругъ этой оси.

---

*) *Уравненіе (4) для проекцій возможныхъ перемѣщеній имѣетъ мѣсто и тогда, когда уравненіе связи $f=0$ содержитъ время t явнымъ образомъ.*

§ 4. *Идеальныя связи и связи съ тренiемъ.*

Составимъ выраженiе для *суммы работъ реакцiй связи* (1) на "возможномъ перемѣщенiи" системы.

Обозначимъ реакцiи, оказываемыя кинематической связью на точки M_1, M_2, ... M_n, соотвѣтственно черезъ:

$$R^{(1)},\ R^{(2)},\ \ldots\ R^{(n)},$$

а проекцiи ихъ:

$$X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)},\ X^{(2)}, Y^{(2)}, Z^{(2)}, \ldots\ldots X^{(n)}, Y^{(n)}, Z^{(n)}.$$

Элементарная работа реакцiи $R^{(i)}$ связи на "возможномъ перемѣщенiи" точки M_i выразится такъ:

$$X^{(i)}.\delta x_i + Y^{(i)}.\delta y_i + Z^{(i)}.\delta z_i = R^{(i)}.\cos(R^{(i)}, \delta s_i),$$

а сумма работъ реакцiй на возможномъ перемѣщенiи системы будетъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X^{(i)}.\delta x_i + Y^{(i)}.\delta y_i + Z^{(i)}.\delta z_i) = \sum_{i=1}^{i=n} R^{(i)}.\delta s_i.\cos(R^{(i)}, \delta s_i)\ \ldots\ldots (5)$$

Опредѣленiе.

Связь называется *идеальною,* когда сумма работъ ея реакцiй на всякихъ "возможныхъ перемѣщенiяхъ" точекъ системы равна нулю, въ противномъ случаѣ связь называется связью съ *тренiемъ.*

Воспользуемся опредѣленiемъ идеальной связи для полученiя *проекцiй ея реакцiй* на различныя точки системы.

Для идеальной связи, согласно опредѣленiю, имѣемъ изъ уравненiя (5):

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X^{(i)}.\delta x_i + Y^{(i)}.\delta y_i + Z^{(i)}.\delta z_i) = 0\ \ldots\ldots\ldots (6)$$

Проекцiи возможныхъ перемѣщенiй при существованiи связи:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots\ldots z_n) = 0\ \ldots\ldots (1)$$

должны удовлетворять уравненію (4):

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\delta y_i+\frac{\partial f}{\partial z_i}\cdot\delta z_i\right)=0.$$

Умножимъ обѣ части этого уравненія на нѣкоторый множитель λ , который пока остается неопредѣленнымъ:

$$\lambda\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\delta x_i+\frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\delta y_i+\frac{\partial f}{\partial z_i}\cdot\delta z_i\right)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Вычитая уравненіе (7) изъ уравненія (6), находимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left\{\left(X^{(i)}-\lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\delta x_i+\left(Y^{(i)}-\lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)\cdot\delta y_i+\left(Z-\lambda\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)\cdot\delta z_i\right\}=0 \quad \ldots (8)$$

Изъ $3n$ проекцій возможныхъ перемѣщеній δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, δz_2, ... δx_n, δy_n, δz_n, въ силу уравненія (4), одна, напримѣръ, δx_1, есть функція остальныхъ, которымъ можемъ давать *произвольныя* безконечно малыя значенія *). Дадимъ λ такое значеніе, чтобы въ уравненіи (8) множитель при δx_1, равнялся нулю:

$$X^{(1)}-\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,$$

т.е. положимъ:

$$\lambda=\frac{X^{(1)}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}};$$

тогда у насъ останется

$$\left(Y^{(1)}-\lambda\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)\cdot\delta y_1+\left(Z^{(1)}-\lambda\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\cdot\delta z_1+\left(X^{(2)}-\lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\delta x_2+\left(Y^{(2)}-\lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)\cdot\delta y_2+\ldots+\left(Z^{(n)}-\lambda\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\delta z_n=0\ldots(8')$$

---

*) *Предполагается, что координата x_1 входитъ въ уравненіе (1); если бы ур-іе (1) не содержало x_1, мы взяли бы за зависимую проекцію одну изъ величинъ δy_1, δz_1, δx_2 .... δz_n, для которой соотвѣтствующая координата входила бы въ ур-іе (1).*

Такъ какъ $\delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2 \ldots \ldots \ldots \delta z_n$ величины произвольныя, то, чтобы удовлетворялось уравненіе (8'), коэффиціенты передъ ними должны быть равны нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ δy_1 не равно нулю, а всѣ остальныя $\delta z_1, \delta x_2, \ldots \ldots \delta z_n$ равны нулю, тогда получимъ:

$$\left(Y^{(1)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y_1}\right) \delta y = 0$$

и, слѣдовательно, должно быть:

$$Y^{(1)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0;$$

положимъ затѣмъ δz_1 не равно нулю, а $\delta x_2 = \delta y_2 = \ldots \delta z_n = 0$; найдемъ:

$$Z^{(1)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0 \qquad \text{и т.д.}$$

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующія выраженія для проекцій реакцій идеальной связи: $f(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots \ldots z_n) = 0$:

$$\left.\begin{aligned} X^{(i)} &= \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}, \\ Y^{(i)} &= \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y_i}, \\ Z_i^{(i)} &= \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z_i}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

гдѣ $i = 1, 2, 3, \ldots \ldots n$.

Мы нашли такимъ образомъ, что всѣ проекціи реакцій выражаются частными производными отъ выраженія связи по соотвѣтствующимъ координатамъ, умноженными на одинъ и тотъ же множитель.

Найдя выраженія проекцій реакцій, можемъ написать *дифференціальныя уравненія движенія* системы, подчиненной одной *идеальной связи*, выражаемой уравненіемъ (1)

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots\ldots z_n) = 0 ;$$

$$\left.\begin{aligned} m_i x_i'' &= X_i + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}, \\ m_i \cdot y_i'' &= Y_i + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y_i}, \\ m_i z_i'' &= Z_i + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z_i}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (10)$$

гдѣ i = 1, 2, 3 . . . . . n ; или:

$$m_1 x_1'' = X_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1},$$

$$m_1 y_1'' = Y_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_1},$$

$$m_1 z_1'' = Z_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_1},$$

$$m_2 x_2'' = X_2 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$m_2 \cdot y_2'' = Y_2 + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$m_2 \cdot z_2'' = Z_2 + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_2},$$

$$m_3 \cdot x_3'' = X_3 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

. . . .

$$m_n \cdot z_n'' = Z_n + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_n}.$$

Очевидно, если какая либо координата, напримѣръ, y_2 , не входитъ въ уравненіе связи, то соотвѣтствующій членъ не войдетъ въ уравненія (10): $\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0$.

$3n$ уравненій (10) и уравненіе (1) послужатъ намъ для нахожденія ($3n$ + 1) неизвѣстныхъ, $3n$ координатъ и множителя λ

Если система подчинена не одной, а k ($k < 3n$) *идеаль - нымъ связямъ*

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n) = 0, \\ &f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n) = 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (11)$$

тогда каждая идеальная связь оказываетъ на точки системы реакціи, проекціи которыхъ выражаются по формуламъ (9), причемъ множитель λ для различныхъ связей имѣетъ, вообще говоря, *разныя* значенія: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_n$.

Поэтому *дифференціальныя уравненія движенія* точекъ несвободной системы въ общемъ случаѣ будутъ $3n$ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} m_i x_i'' &= X_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \\ m_i y_i'' &= Y_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i}, \\ m_i z_i'' &= Z_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_i} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (12)$$

гдѣ $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$.

$3n$ уравненій (12) вмѣстѣ съ k уравненіями (11) послужатъ намъ для нахожденія $(3n + k)$ неизвѣстныхъ: $3n$ координатъ и k множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_n$.

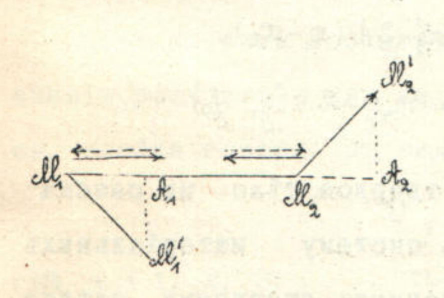
Общій методъ для интегрированія уравненій (12) состоитъ въ слѣдующемъ: исключаемъ изъ уравненій (12) множители λ_1, $\lambda_2 \ldots\ldots \lambda_k$, въ полученныя такимъ образомъ $3n - k$ уравненій вмѣсто k какихъ либо координатъ подставляемъ тѣ ихъ выраженія черезъ остальныя $3n - k$ координатъ, которыя найдемъ изъ уравненій (11); такимъ образомъ получаемъ $3n - k$ дифференціальныхъ уравненій второго порядка съ $3n - k$ неизвѣстными координатами; для этихъ уравненій находимъ $6n - 2k$ интеграловъ, которые будутъ содержать $6n - 2k$ постоянныхъ произ-

вольныхъ; для опредѣленія ихъ должны быть извѣстны *начальныя положенія и начальныя скорости* точекъ системы, т.е. положенія и скорости точекъ въ нѣкоторый моментъ $t = t_0$, причемъ обыкновенно полагаютъ $t_0 = 0$; найдя изъ этихъ интеграловъ $3n - k$ координатъ, какъ функціи отъ времени, остальныя k координатъ найдемъ уже простой подстановкой въ имѣющіяся для нихъ выраженія.

Замѣтимъ, что, если система подчинена k связямъ, то мы можемъ задать произвольно для момента t_0 только $3n - k$ координатъ, остальныя k координатъ найдутся изъ уравненій (11), отнесенныхъ къ моменту t_0; также и для скоростей въ моментъ t_0 можемъ задать произвольно только $3n - k$ проекцій, а остальныя k проекцій скоростей найдутся изъ k уравненій вида (2), выражающихъ условія для скоростей, - также отнесенныхъ къ моменту t_0.

Когда координаты точекъ системы будутъ найдены, какъ функціи времени, мы можемъ найти значенія множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ... λ_k съ помощью какихъ либо k уравненій изъ $3n$ уравненій (12), подставивши въ нихъ вмѣсто координатъ извѣстныя функціи времени, а затѣмъ уже легко опредѣлить величину и направленіе реакціи каждой связи на каждую точку.

Какъ *примѣръ* идеальныхъ связей, разсмотримъ стержень, соединяющій двѣ точки M_1 и M_2. Реакціи стержня R_1 и R_2 равны и противоположны, а проекціи возможныхъ перемѣщеній M_1M_1' и M_2M_2' на направленіе стержня равны между собою (черт.79):



Чертежъ 79.

$$\overline{M_1A_1} = \overline{M_2A_2};$$

поэтому, сумма работъ реакцій равна нулю:

$$\mathfrak{R}_1 \cdot \overline{M_1 A_1} - \mathfrak{R}_2 \cdot \overline{A_2 M_2} = 0 .$$

Здѣсь $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ имѣютъ противоположные знаки.

Уравненіе связи:

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-l^2=0 ;$$

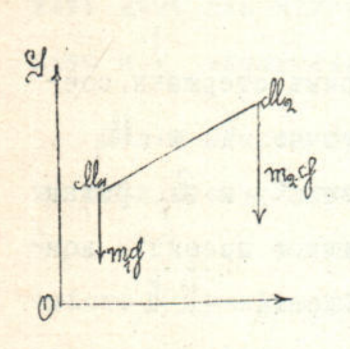
слѣдовательно, проекціи реакцій выразятся формулами:

$$X^{(1)}=2\lambda \cdot (x_1-x_2),$$
$$Y^{(1)}=2\lambda \cdot (y_1-y_2),$$
$$Z^{(1)}=2\lambda \cdot (z_1-z_2);$$

$$X^{(2)}=-2\lambda \cdot (x_1-x_2),$$
$$Y^{(2)}=-2\lambda \cdot (y_1-y_2),$$
$$Z^{(2)}=-2\lambda \cdot (z_1-z_2).$$

Такимъ образомъ, дифференціальныя уравненія движенія въ вертикальной плоскости *двухъ тяжелыхъ точекъ, связанныхъ стержнемъ,* если вертикальную плоскость, въ которой происходитъ движеніе, принять за плоскость XOY и ось OY направить по вертикали вверхъ (черт. 80), будутъ:

$$m_1 x_1'' = 2\lambda \cdot (x_1-x_2),$$
$$m_1 y_1'' = -m_1 g + 2\lambda \cdot (y_1-y_2),$$
$$m_2 x_2'' = 2\lambda \cdot (x_1-x_2),$$
$$m_2 y_2'' = -m_2 g - 2\lambda \cdot (y_1-y_2).$$



Чертежъ 80.

Свободное твердое тѣло мы разсматриваемъ, какъ систему матеріальныхъ точекъ, соединенныхъ стержнями, слѣдовательно, свободное твердое тѣло представляетъ систему, подчиненную *идеальнымъ* связямъ.

Замѣтимъ, что натянутая нить, связывающая двѣ матеріальныя точки, такъ же, какъ и стержень, представляетъ примѣръ

идеальной связи.

Въ томъ случаѣ, когда всѣ кинематическія связи или только нѣкоторыя изъ нихъ *не будутъ идеальными*, въ правыя части дифференціальныхъ уравненій (12) мы должны ввести проекціи *силъ тренія*, соотвѣтствующихъ неидеальнымъ связямъ.

§ 5. *Уравненія равновѣсія системы матеріальныхъ точекъ.*

Уравненія *равновѣсія* получаются изъ уравненій движенія, если положить ускоренія точекъ равными нулю. Такимъ образомъ, уравненія равновѣсія системы *свободныхъ* точекъ, на основаніи уравненій ($\mathcal{A}$), будутъ $3n$ уравненій:

$$X_i = 0\,,\ Y_i = 0\,,\ Z_i = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

гдѣ $i = 1, 2, 3, \ldots n$.

Изъ этихъ $3n$ уравненій можемъ опредѣлить $3n$ координатъ, опредѣляющихъ положеніе равновѣсія системы при данныхъ силахъ. Уравненія (12) могутъ имѣть не одну, а нѣсколько совокупностей вещественныхъ корней; каждой такой совокупности соотвѣтствуетъ положеніе равновѣсія системы; въ этомъ случаѣ система при дѣйствіи данныхъ силъ можетъ занимать любое изъ найденныхъ положеній.

Если система *подчинена кинематическимъ связямъ*, тогда уравненія равновѣсія ея, на основаніи уравненій ($\mathcal{B}$), представятся, вообще говоря, въ видѣ:

$$\mathcal{X}_i = 0\,,\ \mathcal{Y}_i = 0\,,\ \mathcal{Z}_i = 0\,,$$

гдѣ $i = 1, 2, 3, \ldots n$.

Если система подчинена k *идеальнымъ связямъ*, выражаемыми уравненіями (11), то уравненія равновѣсія ея, на основаніи уравненій (12), будутъ вида:

$$X_i+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+\dots\dots\dots+\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i},$$

$$Y_i+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_i}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_i}\dots\dots\dots+\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial y_i},$$

$$Z_i+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z_i}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z_i}+\dots\dots\dots+\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial z_i}.$$

гдѣ i = 1, 2, 3, ... n.

Изъ этихъ $3n$ уравненій и k уравненій связей, при данныхъ силахъ мы можемъ найти $3n+k$ неизвѣстныхъ: $3n$ координатъ точекъ системы въ положеніи равновѣсія и k множителей: λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n; зная величины этихъ множителей, легко уже опредѣлить реакціи, которыя оказываютъ связи на точки системы въ положеніи равновѣсія.

ГЛАВА IV.

НАЧАЛО ВОЗМОЖНЫХЪ ПЕРЕМѢЩЕНІЙ И НАЧАЛО Д'АЛАМБЕРА.

§ 1. *Начало возможныхъ перемѣщеній для случая равновѣсія.*

Возможнымъ перемѣщеніемъ или *виртуальнымъ отклоненіемъ* одной точки или системы точекъ мы называли въ предыдущей главѣ (въ § 3) такое безконечно малое перемѣщеніе, которое не нарушаетъ данныхъ связей, если не принимать во вниманіе нарушеній безконечно малыхъ второго и высшихъ порядковъ.

Воспользуемся этимъ понятіемъ прежде всего для того, чтобы всѣ уравненія равновѣсія въ каждомъ случаѣ замѣнить *однимъ*

равносильнимъ имъ уравненіемъ.

Разсмотримъ сначала случай *одной матеріальной точки.*

Уравненія равновѣсія *свободной* матеріальной точки представляются въ видѣ:

$$X=0,\ Y=0,\ Z=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Уравненія равновѣсія точки, находящейся на поверхности

$$f(x,y,z)=0\ .$$

будутъ:

$$\left.\begin{aligned} X+\lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial x}&=0,\\ Y+\lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial y}&=0,\\ Z+\lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial z}&=0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

гдѣ $\lambda=\frac{R}{\Delta f}$

Уравненія равновѣсія точки, находящейся на кривой

$$f_1(x,y,z)=0\ ,$$
$$f_2(x,y,z)=0\ .$$

будутъ:

$$\left.\begin{aligned} X+\lambda_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}&=0,\\ Y+\lambda_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}&=0,\\ Z+\lambda_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\cdot\frac{\partial f_2}{\partial z}&=0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ (3)$$

гдѣ $\lambda_1=\frac{R_1}{\Delta f_1}$ и $\lambda_2=\frac{R_2}{\Delta f_2}$.

Въ уравненіяхъ (1), (2) и (3) черезъ X, Y, Z обозначены проекціи равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, включая въ число ихъ и силу тренія, если она существуетъ, R, R_1, R_2 - реакціи соотвѣтствующихъ поверхностей.

Будемъ обозначать возможное перемѣщеніе точки, какъ и въ главѣ III, § 3, через δs, его проекціи на координатныя оси черезъ δx, δy, δz.

Мы знаемъ, что въ случаѣ свободной матеріальной точки всѣ эти проекціи произвольны, когда точка находится на поверхности, возможное перемѣщеніе δs лежитъ въ касательной плоскости, и проекціи его удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\delta z=0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

когда же точка находится на кривой, то возможное перемѣщеніе направлено по касательной къ кривой, и проекціи его удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\delta x+\frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\delta y+\frac{\partial f_1}{\partial z}\delta z=0,\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}\cdot\delta x+\frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\delta y+\frac{\partial f_2}{\partial z}\cdot\delta z=0.\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (5)$$

Умножимъ уравненія равновѣсія точки каждой изъ системъ (1), (2) и (3): первое на δx, второе на δy, третье на δz и сложимъ, тогда мы получимъ какъ для точки свободной, такъ и для точки несвободной въ силу уравненія (4) и уравненій (5), *одно и то же уравненіе:*

$$X.\delta x+Y.\delta y+Z.\delta z=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Извѣстно, что трехчленъ, стоящій въ лѣвой части уравненія (6), равенъ произведенію:

$$F.\delta s.\cos(F,\delta s)$$

и выражаетъ работу равнодѣйствующей данныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, на безконечно маломъ перемѣщеніи ея изъ положенія равновѣсія.

Уравненіе (6) выражаетъ *начало возможныхъ перемищеній изъ положенія равновѣсія для одной точки:*

Работа равнодѣйствующей данныхъ силъ (включая и силу тренія), приложенныхъ къ точкѣ, на всякомъ возможномъ перемѣщеніи точки изъ положенія равновѣсія равна нулю.

Уравненіе (6) мы получили изъ уравненій равновѣсія, но можно, обратно, изъ уравненій (6) получить уравненія равновѣсія [съ помощью уравненій (4) и (5)].

Въ случаѣ свободной точки проекціи возможнаго перемѣщенія δx, δy, δz произвольны; положимъ: δx не равно нулю, а $\delta y = \delta z = 0$, тогда изъ уравненій (6) слѣдуетъ:

$$X = 0\ ;$$

положимъ: δy не нуль, а $\delta x = \delta z = 0$, получаемъ:

$$Y = 0\ ;$$

наконецъ, полагая: δz не нуль, а $\delta x = \delta y = 0$, находимъ:

$$Z = 0\ ;$$

такимъ образомъ, изъ уравненій (6) вытекаютъ, какъ необходимое слѣдствіе, три уравненія (1) равновѣсія свободной точки:

$$X = 0\ ,\ Y = 0\ ,\ Z = 0\ .$$

Въ томъ случаѣ, когда точка находится на поверхности, умножая уравненіе (4) на неопредѣленный пока множитель λ и складывая съ уравненіемъ (6), получимъ:

$$\left(X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y + \left(Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z = 0 \qquad (*)$$

Въ силу уравненія (4) одна изъ проекцій δx, δy, δz выражается черезъ двѣ остальныя, напримѣръ, δz черезъ δx и δy, которыя остаются произвольными, дадимъ λ такое значеніе, чтобы множитель при δz въ уравненіи (*) былъ равенъ нулю:

$$Z+\lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=0;$$

Полагая затѣмъ: δx не нуль, а $\delta y=0$, получаемъ:

$$X+\lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial x}=0;$$

наконецъ, полагая δy не нуль, находимъ:

$$Y+\lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Мы получимъ, такимъ образомъ, уравненія (2), какъ необходимое слѣдствіе уравненій (6) и (4).

Если точка находится на кривой, умножаемъ первое изъ уравненій (5) на λ_1, второе на λ_2, причемъ λ_1 и λ_2 величины пока неопредѣленныя, складываемъ съ уравненіями (8), получаемъ:

$$\left(X+\lambda_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}\right).\delta x+\left(Y+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}\right).\delta y+\left(Z+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\delta z=0 \quad (**)$$

Въ силу уравненій (5) двѣ изъ проекцій δx, δy, δz выражаются черезъ третью, напримѣръ, δy и δz черезъ δx, которая остается произвольною; дадимъ λ_1 и λ_2 такія значенія, чтобы множители при δy и δz въ уравненіи (**) равнялись нулю

$$Y+\lambda_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}=0,$$

$$Z+\lambda_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\cdot\frac{\partial f_2}{\partial z}=0;$$

тогда и множитель при δx долженъ равняться нулю:

$$X+\lambda_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}=0.$$

Мы получимъ изъ уравненій (6) и уравненій (5) уравненія (8).

Изъ всего сказаннаго можемъ сдѣлать слѣдующее заключеніе: уравненіе (6) *равносильно* каждой изъ системъ (1), (2) и (3) уравненій равновѣсія матеріальной точки. Оно выражаетъ *необходимое и достаточное* условіе равновѣсія точки, если принять во вниманіе: произвольность проекцій возможнаго перемѣщенія въ случаѣ свободной точки, уравненіе (4), - когда точка находится на поверхности, и уравненія (5) - когда точка находится на кривой.

Перейдемъ къ *системѣ* матеріальныхъ точекъ.

Въ § 5 главы III были выведены *уравненія равновѣсія*, какъ въ случаѣ системы *свободныхъ* матеріальныхъ точекъ:

$$X_i = 0, \quad Y_i = 0, \quad Z_i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

($i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$), такъ и въ случаѣ системы *несвободныхъ* матеріальныхъ точекъ, подчиненной $k \, (k < 3n)$ идеальнымъ связямъ:

$$f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots z_n) = 0,$$
$$f_2 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots f_k = 0;$$

$$\left.\begin{aligned} X_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0, \\ Y_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i} = 0, \\ Z_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_i} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i} = 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (8)$$

гдѣ $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$.

Если связи не идеальныя, то проекціи силъ тренія должны быть включены въ первые члены этихъ уравненій.

Знаемъ, что въ случаѣ системы свободныхъ матеріальныхъ точекъ проекціи возможныхъ перемѣщеній точекъ системы δx_1, δy_1, δz_1, $\delta x_2, \ldots\ldots\ldots \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$ произвольны, а въ случаѣ

системы несвободныхъ матеріальныхъ точекъ, подчиненной къ вышеуказаннымъ связямъ, проекціи эти должны удовлетворять къ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\cdot\delta x_i+\frac{\partial f_1}{\partial y_i}\cdot\delta y_i+\frac{\partial f_1}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0\,,\\
&\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\cdot\delta x_i+\frac{\partial f_2}{\partial y_i}\cdot\delta y_i+\frac{\partial f_2}{\partial z_i}\cdot\delta z_i\right)=0\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\cdot\delta x_i+\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\cdot\delta y_i+\frac{\partial f_k}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0\,.
\end{aligned}\right\}\quad\dots\dots\dots(9)$$

Умноживъ уравненія равновѣсія системы, именно уравненія (7), когда система свободна, уравненія (8), когда система несвободна, соотвѣтственно на δx_i, δy_i, δz_i, складываемъ ихъ для всѣхъ значеній $i = 1, 2, 3, \dots n$; принимая при этомъ во вниманіе, въ случаѣ несвободной системы, уравненія (9), получаемъ какъ для свободной, такъ и для несвободной системы одно и то же уравненіе:

$$X_1\delta x_1+Y_1\delta y_1+Z_1\delta z_1+X_2\delta x_2+Y_2\delta y_2+Z_2\delta z_2+\dots\dots+Z_n\delta z_n=0$$

или короче:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i\cdot\delta x_i+Y_i\cdot\delta y_i+Z_i\cdot\delta z_i)=0\,\dots\dots\dots(10)$$

Уравненіе (10) выражаетъ *начало возможныхъ перемѣщеній изъ положенія равновѣсія системы матеріальныхъ точекъ:*

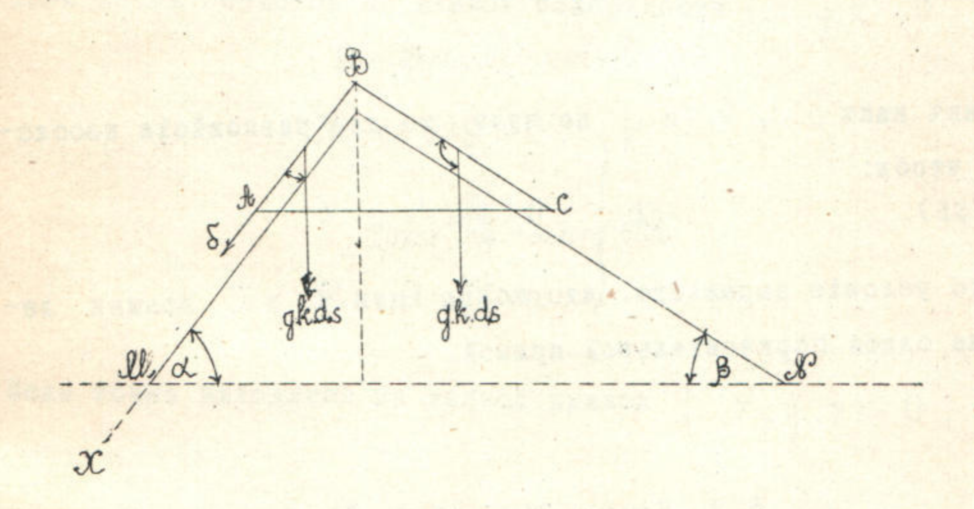
Сумма работъ данныхъ силъ (и силъ тренія), приложенныхъ къ точкамъ системы, на всякихъ возможныхъ перемѣщеніяхъ системы изъ положенія равновѣсія равна нулю.

Уравненіе (10) мы вывели изъ уравненій равновѣсія. Обратно, принимая во вниманіе произвольность проекцій возможныхъ перемѣщеній въ случаѣ системы свободныхъ точекъ, мы выведемъ уравненіе равновѣсія (7) изъ уравненія (10), а въ случаѣ системы несвободныхъ точекъ, примѣняя способъ неопредѣленныхъ множите-

лей, подобно тому, какъ мы дѣлали выше въ случаѣ одной точки, получимъ уравненія равновѣсія (8) изъ уравненія (10) съ помощью уравненій (9).

Такимъ образомъ, уравненіе (10) *равносильно* или системѣ уравненій (7) или системѣ уравненій (8) и выражаетъ условіе, *необходимое и достаточное* для равновѣсія системы.

Примѣръ. Найти условіе, при которомъ будетъ находиться въ равновѣсіи тяжелая нить однородной плотности, помѣщенная на двухъ прямыхъ, составляющихъ уголъ въ вертикальной плоскости.



Чертежъ 81.

Пусть α и β (черт.81) будутъ углы, которые данныя прямыя составляютъ съ горизонтомъ.

Обозначимъ возможное перемѣщеніе нити, напримѣръ, влѣво, черезъ δ ; ту же величину будетъ имѣть соотвѣтствующее перемѣщеніе каждой точки нити.

Возьмемъ элементъ длины ds части нити AB . Если k плотность нити, то масса этого элемента будетъ $k.ds$, а вѣсъ $k.ds.g$.

Работа этой силы на возможномъ перемѣщеніи δ будетъ $k.ds.g.\delta.\sin\alpha$, а сумма работъ для всѣхъ элементовъ части AB выразится такъ:

$$\delta.k.g.\sin\alpha.\sum ds = \delta.k.g.\sin\alpha.AB.$$

Возьмемъ элементъ длины ds части нити BC. Работа его вѣса на возможномъ перемѣщеніи будетъ:

$$k.ds.g.\delta.(-\sin\beta),$$

а для всей части

$$-\delta.k.g.\sin\beta\sum ds = -\delta.k.g.\sin\beta.\overline{BC}.$$

Такимъ образомъ, вся работа вѣса нити на возможномъ перемѣщеніи ея δ будетъ:

$$\delta.k.g.(\overline{AB}.\sin\alpha - \overline{BC}.\sin\beta).$$

Для равновѣсія нити необходимо:

$$\delta.k.g.(\overline{AB}.\sin\alpha - \overline{BC}.\sin\beta) = 0.$$

Такъ какъ δ, k и g не нули, то для равновѣсія необходимо, чтобы:

$$\overline{AB}.\sin\alpha = \overline{BC}.\sin\beta.$$

Это условіе выражаетъ, что концы нити A и C должны лежать на одной горизонтальной прямой.

§ 2. *Начало д'Аламбера* *).

Начало д'Аламбера позволяетъ всякій вопросъ о *движеніи* свести къ вопросу о *равновѣсіи*.

Д'Аламберъ ввелъ новое понятіе о силѣ инерціи.

Силою инерціи для данной матеріальной точки называютъ силу, которая по величинѣ равна произведенію массы на ускореніе точки и направлена въ сторону, противоположную этому ускоренію **).

---

*) D'Alembert, "Traitè de Dynamique" 1743.

) *Замѣтимъ, что сила, равная и прямо противоположная силѣ инерціи, называется* *движущею силою***.

Такимъ образомъ, проекціи силы инерціи на координатныя оси или ея составляющія по координатнымъ осямъ *) будутъ:

$$-mx'', \quad -my'', \quad -mz''.$$

Извѣстныя намъ дифференціальныя уравненія движенія точки можно представить въ такомъ видѣ: если точка свободна:

$$\left.\begin{aligned} X - mx'' &= 0, \\ Y - my'' &= 0, \\ Z - mz'' &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Если точка остается на данной поверхности $f(x, y, z) = 0$,

$$\left.\begin{aligned} X - mx'' + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \\ Y - my'' + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \\ Z - mz'' + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Если точка находится на данной кривой $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$.

$$\left.\begin{aligned} X - mx'' + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0, \\ Y - my'' + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y} &= 0, \\ Z - mz'' + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

---

*) *Сила инерціи можетъ быть разложена также на двѣ такія взаимно перпендикулярныя составляющія, изъ которыхъ одна - касательная, равная по величинѣ $m\left|\frac{dv}{dt}\right|$ и направленная по касательной къ траекторіи точки въ сторону противоположную скорости; другая - нормальная, равная по величинѣ $m\frac{v^2}{\rho}$, гдѣ ρ радіусъ кривизны траекторіи, и направленная по нормали къ траекторіи въ сторону ея выпуклости. Эта вторая составляющая, очевидно, есть центробѣжная сила.*

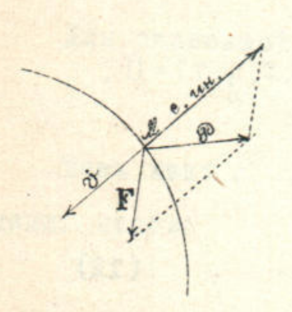
Въ лѣвыхъ частяхъ уравненій (11), (12) и (13) мы имѣемъ суммы проекцій: задаваемой силы, или равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, силы инерціи и, въ случаѣ несвободной точки, реакцій.

Назовемъ равнодѣйствующую задаваемой силы (или задаваемыхъ силъ) и силы инерціи *потерянною силою* и обозначимъ буквою $\mathfrak{P}$ (черт. 82). Очевидно, проекціи потерянной силы на координатныя оси будутъ:

$$\mathfrak{P}_x = X - mx'',$$

$$\mathfrak{P}_y = Y - my'',$$

$$\mathfrak{P}_z = Z - mz''.$$



Чертежъ 82.

Такимъ образомъ, уравненія движенія (11), (12) и (13 могутъ быть написаны въ видѣ:

$$\mathfrak{P}_x = 0\,,\ \mathfrak{P}_y = 0\,,\ \mathfrak{P}_z = 0 \qquad \ldots\ldots (11)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{P}_x + \lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,, \\ &\mathfrak{P}_y + \lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 0\,, \\ &\mathfrak{P}_z + \lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (12)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{P}_x + \lambda_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0\,, \\ &\mathfrak{P}_y + \lambda_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0\,, \\ &\mathfrak{P}_z + \lambda_1\cdot\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\cdot\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (13)$$

Сравнивая уравненія (11), (12) и (13) съ уравненіями равновѣсія (1), (2) и (3), замѣчаемъ, что первыя отличаются отъ послѣднихъ только тѣмъ, что въ нихъ входитъ, вмѣсто за-

данаемой силы, сила потерянная.

Такимъ образомъ, уравненія (11), (12) и (13) въ каждый моментъ могутъ быть разсматриваемы, какъ уравненія равновѣсія потерянной силы.

Они выражаютъ *начало д'Аламбера въ случаѣ одной точки:*

При движеніи матеріальной точки въ каждый моментъ времени потерянная сила или равна нулю, если точка свободна, или уравновѣшивается реакціей поверхности или кривой, если точка несвободна.

Распространимъ это начало на случай *системы* матеріальныхъ точекъ.

Дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ могутъ быть написаны въ видѣ 3 уравненій:

$$\left.\begin{aligned} X_i - m_i x_i'' &= 0, \\ Y_i - m_i y_i'' &= 0, \\ Z_i - m_i z_i'' &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

(гдѣ $i = 1, 2, 3, \ldots n$), если система свободна, и въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} X_i - m_i x_i'' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} &= 0, \\ Y_i - m_i y_i'' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i} &= 0, \\ Z_i - m_i z_i'' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

($i = 1, 2, 3, \ldots n$), если система подчинена k ($k < 3n$) связямъ:

$$f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n) = 0,$$
$$f_2 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f_k = 0;$$

когда эти связи не идеальныя, проекціи силъ тренія должны быть включены въ первые члены уравненій (15).

Потерянную силу въ точкѣ M_i обозначимъ черезъ $\mathcal{P}_i$, проекціи ея, очевидно, будутъ:

$$\mathcal{P}_{ix} = X_i - m_i x_i'',$$

$$\mathcal{P}_{iy} = Y_i - m_i y_i'',$$

$$\mathcal{P}_{iz} = Z_i - m_i z_i''.$$

$3n$ уравненій (14) и (15) могутъ быть тогда написаны въ видѣ:

$$\mathcal{P}_{ix} = 0\,,\quad \mathcal{P}_{iy} = 0\,,\quad \mathcal{P}_{iz} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (14_1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{P}_{ix} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0, \\ &\mathcal{P}_{iy} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i} = 0, \\ &\mathcal{P}_{iz} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \ldots\ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (15_1)$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n.$$

Уравненія (14_1) и (15_1) могутъ быть разсматриваемы какъ *уравненія равновѣсія* потерянныхъ силъ.

Они выражаютъ *начало д'Аламбера въ случаѣ системы матеріальныхъ точекъ:*

При движеніи системы матеріальныхъ точекъ въ каждый моментъ времени потерянныя силы для всѣхъ точекъ системы равны нулю, если система свободна, и уравновѣшиваются черезъ посредство реакцій связей, если система не свободна.

§ 3. *Начало возможныхъ перемѣщеній для случая движенія.*

Примѣняя начало возможныхъ перемѣщеній къ потеряннымъ силамъ, мы получимъ начало возможныхъ перемѣщеній для случая

движенія.

Такъ при *движеніи точки* работа потерянной силы на возможномъ перемѣщеніи точки изъ положенія, которое она занимаетъ въ какой-либо моментъ времени, будетъ равна нулю, какъ въ случаѣ свободной, такъ и въ случаѣ несвободной точки; - получаемъ:

$$P_x \delta x + P_y \delta y + P_z \delta z = 0$$

или

$$(X - m x'') \cdot \delta x + (Y - m \cdot y'') \cdot \delta y + (Z - m z'') \cdot \delta z = 0 \ldots\ldots\ldots (16)$$

Уравненіе (16) выражаетъ *"начало возможныхъ перемѣщеній для движенія точки"*.

На основаніи изложеннаго въ § 1 ясно, что уравненіе (16) *равносильно* уравненіямъ (11), (12) и (13).

Также при *движеніи системы* въ каждый моментъ времени сумма работъ потерянныхъ силъ на всякихъ возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ системы изъ положеній, занимаемыхъ ими въ этотъ моментъ, будетъ равна нулю; - получаемъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (P_{ix} \delta x_i + P_{iy} \delta y_i + P_{iz} \delta z_i) = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left\{ (X_i - m_i x_i'') \cdot \delta x_i + (Y_i - m_i y_i'') \delta y_i + (Z_i - m_i z_i'') \delta z_i \right\} = 0 \ldots\ldots\ldots (17)$$

Уравненіе (17) выражаетъ *"начало возможныхъ перемѣщеній для движенія системы"*.

На основаніи изложеннаго въ § 1 ясно, что уравненіе (17) *равносильно* $3 \cdot n$ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія системы (14) и (15).

Уравненіе (17) можетъ быть разсматриваемо, какъ *основное уравненіе* всей механики, ибо изъ него могутъ быть получены уравненія равновѣсія и движенія, какъ въ случаѣ одной точки такъ и въ случаѣ системы точекъ, а, слѣдовательно, и различ-

ныя свойства равновѣсія и движенія, которыя изъ этихъ уравненій выводятся.

Примѣръ. Въ случаѣ движенія тяжелой нити по двумъ наклоннымъ прямымъ (см. примѣръ параграфа 1), если длину AB (черт. 81), обозначимъ черезъ x , уравненіе, выражающее начало возможныхъ перемѣщеній, будетъ:

$$[k.x.g.\sin\alpha - k(l-x)g.\sin\beta - k^2.l\frac{d^2x}{dt^2}]\,\delta - 0\;;$$

отсюда слѣдуетъ дифференціальное уравненіе движенія нити:

$$x'' = \frac{g}{l}(\sin\alpha + \sin\beta)x - g.\sin\beta .$$

Обозначимъ для сокращенія письма:

$$\frac{g}{l}(\sin\alpha + \sin\beta) = n^2\;;$$

тогда уравненіе движенія будетъ:

$$x'' = n^2.x - g.\sin\beta .$$

Интегрируя это уравненіе, находимъ:

$$x = \frac{g.\sin\beta}{n^2} + C.e^{nt} + D.e^{-nt},$$

гдѣ C и D постоянныя произвольныя.

Такъ какъ имѣемъ:

$$x' = n.(C.e^{+nt} - D.e^{-nt}),$$

то для C и D получаемъ слѣдующія выраженія черезъ начальныя данныя:

$$C = \frac{1}{2}(x_0 - \frac{g.\sin\beta}{n^2} + \frac{x_0'}{n}),$$

$$D = \frac{1}{2}(x_0 - \frac{g.\sin\beta}{n^2} - \frac{x_0'}{n})$$

Разсмотримъ подробнѣе, напримѣръ, тотъ случай, когда въ

начальный моментъ нить движется влѣво (черт.79), т.е. когда

$$x_0^{\prime} > 0$$

Тогда $C > D$; если при этомъ будетъ $C > 0$, то скорость нити не обращается въ нуль: вся нить переходитъ на лѣвую прямую BM и далѣе движется равноускоренно; если же будетъ $C < 0$, то нить сначала движется влѣво, въ нѣкоторый моментъ скорость ея обращается въ нуль, затѣмъ вся нить переходитъ на правую прямую BN и далѣе движется равноускоренно.

Примѣчаніе. При изученіи изложенныхъ здѣсь началъ и слѣдующихъ далѣе законовъ важно все время имѣть въ виду, что они имѣютъ мѣсто не только для отдѣльныхъ матеріальныхъ точекъ, но для всякаго тѣла: твердаго, жидкаго и газообразнаго, а также и для всякой совокупности указанныхъ тѣлъ; - въ этихъ случаяхъ каждый элементъ тѣла замѣняется матеріальной точкой, масса которой равна массѣ элемента, а поэтому число точекъ системы безконечно велико ($n = \infty$) и масса каждой точки безконечно мала.

Вмѣсто декартовыхъ координатъ: x_1, y_1, z_1, x_2, ... z_n часто употребляются другія перемѣнныя величины, опредѣляющія положеніе системы.

ГЛАВА V.

ЗАКОНЪ ДВИЖЕНІЯ ЦЕНТРА ИНЕРЦІИ

(или "законъ движенія центра тяжести").

§ 1. *Общій законъ движенія центра инерціи.*

Центромъ инерціи системы матеріальныхъ точекъ называется *геометрическая* точка, координаты которой x_c, y_c, z_c, выражаются слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i}{M}, \\ y_c &= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i}{M}, \\ z_c &= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i}{M}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ $M = \sum_{i=1}^{i=n} m_i$ есть *"масса системы"*, равная суммѣ массъ всѣхъ точекъ системы.

Такой же видъ имѣютъ формулы для координатъ *центра тяжести*, если подставить въ нихъ вмѣсто вѣса p_i, равное ему произведеніе $m_i g$ и сократить на g; отсюда слѣдуетъ, что геометрическая точка, которую мы назвали центромъ инерціи системы, совпадаетъ съ центромъ тяжести той же системы, когда на точки ея дѣйствуютъ силы тяжести *).

---

*) *Вслѣдствіе этого "центръ инерціи" называютъ часто "цен-*

Возьмемъ дифференціальныя уравненія движенія системы въ самомъ общемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} m_i \cdot x_i'' &= \mathfrak{X}_i, \\ m_i \cdot y_i'' &= \mathfrak{Y}_i, \\ m_i \cdot z_i'' &= \mathfrak{Z}_i. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$.

Здѣсь курсивныя буквы: $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{Y}_i$, $\mathfrak{Z}_i$ обозначаютъ проекціи равнодѣйствующихъ *всѣхъ силъ*, приложенныхъ къ точкѣ M_i - какъ силъ *задаваемыхъ*, такъ и тѣхъ силъ *(реакцій и силъ тренія)*, которыя являются вслѣдствіе существованія связей; поэтому, если система точекъ *свободна*, то:

$$\mathfrak{X}_i = X_i,$$

$$\mathfrak{Y}_i = Y_i,$$

$$\mathfrak{Z}_i = Z_i;$$

если же система *несвободна*, но подчинена только связямъ идеальнымъ:

$$f_1 = 0, \; f_2 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots f_k = 0,$$

то:

$$\mathfrak{X}_i = X_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i},$$

$$\mathfrak{Y}_i = Y_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i},$$

$$\mathfrak{Z}_i = Z_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i}.$$

Складывая порознь всѣ дифференціальныя уравненія, содержащія проекціи на координатныя оси OX, OY и OZ, получимъ три уравненія:

тромъ тяжести", но мы удержимъ первый терминъ, такъ какъ въ механикѣ разсматриваются и такія системы матеріальныхъ точекъ, на которыя силы тяжести не дѣйствуютъ.

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i'' &= \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{X}_i\,,\\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i'' &= \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{Y}_i\,,\\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i'' &= \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{Z}_i\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Изъ уравненій (1) находимъ:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}.x_c &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i\\ \mathfrak{M}.y_c &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i\\ \mathfrak{M}.z_c &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i\end{aligned}$$

откуда:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M}.x_c' &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i'\,,\\ \mathfrak{M}.y_c' &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i'\,,\\ \mathfrak{M}.z_c' &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i'\,;\end{aligned}\right\}\quad{}^{*)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

и далѣе:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M}.x_c'' &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i''\,,\\ \mathfrak{M}.y_c'' &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i''\,,\\ \mathfrak{M}.z_c'' &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i''\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(***)$$

---

*) *Эти формулы выражаютъ, что* *к о л и ч е с т в о д в и ж е н і я* *центра инерціи въ предположеніи, что онъ имѣетъ массу, равную массѣ системы, равно по величинѣ и по направленію геометрической суммѣ количествъ движенія всѣхъ точекъ системы.*

Сравнивая формулы (*) и (***) получимъ:

$$\left.\begin{aligned} M x_c'' &= \sum_{i=1}^{i=n} X_i, \\ M y_c'' &= \sum_{i=1}^{i=n} Y_i, \\ M z_c'' &= \sum_{i=1}^{i=n} Z_i. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Уравненія (3) можемъ разсматривать какъ дифференціальныя уравненія движенія свободной матеріальной точки, координаты которой суть x_c, y_c, z_c и масса M, при дѣйствіи силы, которая равна по величинѣ и направленію геометрической суммѣ *всѣхъ* силъ, дѣйствующихъ на точки системы.

Уравненія (3) выражаютъ *общій законъ движенія центра инерціи:*

При движеніи системы центръ инерціи (центръ тяжести) ея движется, какъ свободная матеріальная точка, масса которой равна массѣ системы, при дѣйствіи силы, равной по величинѣ и направленію геометрической суммѣ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на точки системы.

Силы, приложенныя къ точкамъ системы, мы дѣлили на двѣ группы: силы *задаваемыя* и *реакціи* (въ числѣ ихъ и силы тренія), но во многихъ вопросахъ удобно другое раздѣленіе, а именно на силы *внутреннія* и силы *внѣшнія*.

Внутреннія силы суть силы, удовлетворяющія тому условію, что каждой изъ нихъ соотвѣтствуетъ другая сила, приложенная къ другой точкѣ системы, равная первой по величинѣ и направленная по той же прямой въ противоположную сторону; всѣ другія силы, приложенныя къ точкамъ системы, суть *силы внѣшнія*. Реакціи связей могутъ входить какъ въ число внутреннихъ, такъ и

въ число внѣшнихъ силъ.

Примѣры внутреннихъ силъ: силы взаимодѣйствій (притяженія или отталкиванія) между точками системы, реакціи стержня или натянутой нити на тѣ двѣ точки, которыя стержень или нить соединяетъ, и др.

Примѣры внѣшнихъ силъ: силы тяжести, силы притяженія къ внѣшнимъ центрамъ, реакціи поверхностей и др.

Обозначимъ проекціи равнодѣйствующей всѣхъ внутреннихъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ $\mathcal{M}_i$ ($i = 1, 2, 3 \dots n$), черезъ X_i^J, Y_i^J, Z_i^J, а проекціи равнодѣйствующей всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ той же точкѣ $\mathcal{M}_i$, черезъ X_i^ε, Y_i^ε, Z_i^ε, тогда можемъ написать:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{X}_i = \sum_{i=1}^{i=n} X_i^J + \sum_{i=1}^{i=n} X_i^\varepsilon,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{Y}_i = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i^J + \sum_{i=1}^{i=n} Y_i^\varepsilon,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{Z}_i = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i^J + \sum_{i=1}^{i=n} Z_i^\varepsilon$$

Внутреннія силы попарно равны и направлены прямо противоположно, поэтому сумма ихъ проекцій на всякую ось равна нулю, слѣдовательно,

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i^J = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i^J = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i^J = 0,$$

и мы получаемъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{X}_i = \sum_{i=1}^{i=n} X_i^\varepsilon,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{Y}_i = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i^\varepsilon,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{Z}_i = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i^\varepsilon.$$

Такимъ образомъ, уравненія (3) принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} M.x_c'' &= \sum_{i=1}^{i=n} X_i^e, \\ M.y_c'' &= \sum_{i=1}^{i=n} Y_i^e, \\ M.z_c'' &= \sum_{i=1}^{i=n} Z_i^e. \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

Уравненія (4) позволяютъ выразить *законъ движенія центра инерціи въ слѣдующей формѣ:*

При движеніи системы центръ инерціи (центръ тяжести) ея движется такъ, какъ свободная матеріальная точка, масса которой равна массѣ системы, при дѣйствіи силы, равной по величинѣ и направленію геометрической суммѣ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ системы.

Твердое тѣло мы разсматриваемъ, какъ систему матеріальныхъ точекъ, связанныхъ стержнями; но реакціи стержней - силы внутреннія, слѣдовательно, центръ тяжести твердаго тѣла движется такъ, какъ свободная матеріальная точка, масса которой равна массѣ тѣла, при дѣйствіи силы, равной геометрической суммѣ однѣхъ *внѣшнихъ силъ,* приложенныхъ къ твердому тѣлу. Напримѣръ, если твердое тѣло, при отсутствіи какихъ-либо опоръ, движется при дѣйствіи силы тяжести, причемъ сопротивленіе воздуха не принимается во вниманіе, то центръ тяжести тѣла описываетъ параболу по тому же закону, какъ свободная тяжелая точка, движущаяся въ пустотѣ.

Изъ уравненій (4) слѣдуетъ, что движеніе центра инерціи системы *не измѣняется, если въ системѣ исчезаютъ внутреннія силы или возникаютъ новыя внутреннія силы.*

Исчезновеніе внутреннихъ силъ имѣетъ мѣсто, напримѣръ, при взрывѣ твердаго тѣла, такъ какъ при этомъ исчезаютъ реакціи нѣкоторыхъ стержней: появленіе новыхъ внутреннихъ силъ имѣетъ мѣсто при соударенiи тѣлъ, образующихъ систему

Отмѣтимъ здѣсь, между прочимъ, какъ слѣдствіе уравненій (4), что человѣкъ, стоящій на совершенно гладкой горизонтальной плоскости, не можетъ ходить по ней, такъ какъ единственныя внѣшнія силы, - сила тяжести и реакціи плоскости вертикальны, слѣдовательно, могутъ сообщить центру тяжести человѣка скорость только въ вертикальномъ направленіи.

Съ помощью закона движенія центра инерціи объясняется, напримѣръ, откатъ орудія при выстрѣлѣ.

Во многихъ задачахъ, интегрируя уравненія (4), мы можемъ получить нѣкоторые *интегралы* дифференціальныхъ уравненій движенія системы.

§ 2. *Законъ сохраненія движенія центра инерціи.*

Законъ движенія центра инерціи представляется въ самомъ простомъ видѣ въ томъ частномъ случаѣ, когда внѣшнія силы или не приложены къ точкамъ системы, или имѣютъ геометрическую сумму, равную нулю.

Въ этомъ случаѣ:

$$\sum X_i^e = 0,$$

$$\sum Y_i^e = 0,$$

$$\sum Z_i^e = 0, \quad ^{*)}$$

и слѣдовательно:

---

*) *Здѣсь и въ слѣдующихъ параграфахъ знакъ и тогда, когда не написано 1, , обозначаетъ сумму, распространенную на всѣ значенія указателя отъ 1 до , гдѣ - число точекъ системы.*

$$\left.\begin{aligned} M.x_c'' &= 0, \\ M.y_c'' &= 0, \\ M.z_c'' &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4_1)$$

Ускореніе центра инерціи равно нулю, значитъ скорость его постоянна по величинѣ и направленію, т.е. центръ инерціи движется прямолинейно и равномѣрно.

Изъ уравненій (4_1) имѣемъ:

$$x_c' = \alpha, \; y_c' = \beta, \; z_c' = \gamma.$$

и

$$\begin{aligned} x_c &= \alpha.t + a, \\ y_c &= \beta.t + b, \\ z_c &= \gamma t + c. \end{aligned}$$

гдѣ α, β, γ, a, b, c - постоянныя произвольныя, въ частныхъ случаяхъ всѣ или нѣкоторыя изъ нихъ могутъ быть равны нулю.

Въ разсматриваемомъ случаѣ мы имѣемъ *законъ сохраненія движенія центра инерціи:*

Если къ системѣ не приложены внѣшнія силы, или если геометрическая сумма внѣшнихъ силъ равна нулю, то центръ инерціи системы движется прямолинейно и равномѣрно или остается въ покоѣ.

Законъ сохраненія движенія центра инерціи имѣетъ, напримѣръ, мѣсто для *свободной* системы, подверженной дѣйствію только внутреннихъ силъ. Примѣръ такой системы представляетъ солнечная система, центръ инерціи которой движется прямолинейно и равномѣрно.

Законъ сохраненія движенія центра инерціи даетъ *шесть интеграловъ* дифференціальныхъ уравненій движенія системы:

$$\sum m_i x_i' = C_1 ,$$

$$\sum m_i y_i' = C_2 ,$$

$$\sum m_i z_i' = C_3 ;$$

$$\sum m_i x_i = C_1 t + D_1 ,$$

$$\sum m_i y_i = C_2 t + D_2 ,$$

$$\sum m_i z_i = C_3 t + D_3 .$$

Значенія постоянныхъ произвольныхъ C_1, C_2, C_3 мы найдемъ, подставляя въ первыя три уравненія вмѣсто x_i', y_i', z_i' проекціи начальныхъ скоростей точекъ системы, а затѣмъ найдемъ и значенія постоянныхъ произвольныхъ: D_1, D_2, D_3 подставляя во вторыя три уравненія вмѣсто x_i, y_i, z_i координаты начальныхъ положеній точекъ системы и полагая:

$$t = t_0 ,$$

обыкновенно полагаютъ:

$$t_0 = 0 .$$

Вышеуказанныя постоянныя α, β, γ, a, b, c связаны весьма просто съ постоянными C и D:

$$\alpha = \frac{C_1}{M} , \ \beta = \frac{C_2}{M} , \ \gamma = \frac{C_3}{M} ,$$

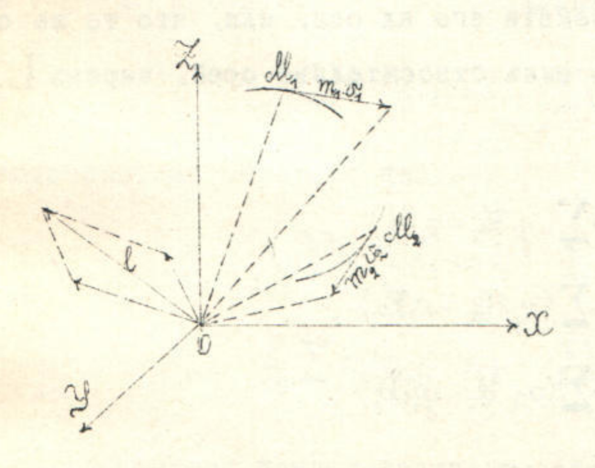
$$a = \frac{D_1}{M} , \ b = \frac{D_2}{M} , \ c = \frac{D_3}{M} .$$

ГЛАВА VI.

ЗАКОНЪ МОМЕНТОВЪ ИЛИ ЗАКОНЪ ПЛОЩАДЕЙ.

§ 1. *Главный моментъ количествъ движенія точекъ системы и главный моментъ силъ.*

Геометрическая сумма моментовъ количествъ движенія точекъ системы относительно точки или относительно оси называется *главнымъ моментомъ количествъ движенія* точекъ системы относительно точки или относительно оси.



Чертежъ 83.

Обозначимъ главный моментъ количествъ движенія относительно начала координатъ черезъ l, проекціи его на координатныя оси, или, что то же самое*), главные моменты количествъ движенія *относительно* осей черезъ l_x, l_y, l_z; будемъ имѣть:

$$l_x=\sum m_i(y_i z_i' - z_i y_i'),$$

$$l_y=\sum m_i(z_i x_i' - x_i z_i'),$$

---

*) *См. "Кинетика точки".*

$$l_z = \sum m_i (x_i y_i' - y_i x_i').$$

Обозначимъ через $\sigma_{yz}^{(i)}$, $\sigma_{zx}^{(i)}$, $\sigma_{xy}^{(i)}$, секторіальныя скорости точки M_i въ плоскостяхъ соотвѣтственно YOZ, ZOX, XOY; тогда:

$$l_x = 2\sum m_i \sigma_{yz}^{(i)},$$

$$l_y = 2\sum m_i \sigma_{zx}^{(i)},$$

$$l_z = 2\sum m_i \sigma_{xy}^{(i)}.$$

Геометрическая сумма моментовъ силъ относительно точки или относительно оси называется *главнымъ моментомъ силъ* относительно точки, или относительно оси.

Обозначая главный моментъ всѣхъ силъ (задаваемыхъ и реакцій), приложенныхъ къ точкамъ системы, относительно начала координатъ через L, а проекціи его на оси, или, что то же самое, главные моменты всѣхъ силъ относительно осей, через L_x, L_y, L_z будемъ имѣть:

$$L_x = \sum (y_i \mathcal{Z}_i - z_i \mathcal{Y}_i),$$

$$L_y = \sum (z_i \mathcal{X}_i - x_i \mathcal{Z}_i),$$

$$L_z = \sum (x_i \mathcal{Y}_i - y_i \mathcal{X}_i).$$

§ 2. *Законъ площадей или законъ моментовъ.*

Чтобы вывести связь между главнымъ моментомъ количествъ движенія и главнымъ моментомъ силъ, воспользуемся дифференціальными уравненіями движенія системы:

$$\left.\begin{aligned} m_i x_i'' &= \mathfrak{X}_i, \\ m_i y_i'' &= \mathfrak{Y}_i, \\ m_i z_i'' &= \mathfrak{Z}_i. \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

гдѣ $i = 1, 2, 3, \dots n$.

Множимъ второе изъ уравненій (1) на z_i і, третье на y_i и вычитаемъ первое произведеніе изъ второго, получаемъ:

$$m_i(y_i z_i'' - z_i y_i'') = y_i \mathfrak{Z}_i - z_i \mathfrak{Y}_i,$$

но

$$y_i z_i'' - z_i y_i'' = \frac{d}{dt}(y_i z_i' - z_i y_i');$$

слѣдовательно:

$$\frac{d}{dt} m_i(y_i z_i' - z_i y_i') = y_i \mathfrak{Z}_i - z_i \mathfrak{Y}_i.$$

Такія равенства могутъ быть написаны для всѣхъ точекъ системы ($i = 1, 2, 3, \dots n$); складывая ихъ, получимъ:

$$\frac{d}{dt} \sum m_i(y_i z_i' - z_i y_i') = \sum (y_i \mathfrak{Z}_i - z_i \mathfrak{Y}_i);$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$\frac{d}{dt} \sum m_i(z_i x_i' - x_i z_i') = \sum (z_i \mathfrak{X}_i - x_i \mathfrak{Z}_i),$$

$$\frac{d}{dt} \sum m_i(x_i y_i' - y_i x_i') = \sum (x_i \mathfrak{Y}_i - y_i \mathfrak{X}_i).$$

Вводя принятыя нами сокращенныя обозначенія, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dl_x}{dt} &= \mathbf{L}_x, \\ \frac{dl_y}{dt} &= \mathbf{L}_y, \\ \frac{dl_z}{dt} &= \mathbf{L}_z. \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (2)$$

Каждое изъ уравненій (2) выражаетъ *законъ моментовъ* по

отношенію къ одной изъ координатныхъ осей:

Первая производная по времени отъ главнаго момента количествъ движенія точекъ системы относительно какой-либо координатной оси равна главному моменту всѣхъ силъ (задаваемыхъ и реакцій), приложенныхъ къ точкамъ системы, относительно той же оси.

Примѣчаніе. Такъ какъ всякую неподвижную ось можно принять за координатную ось, то вышеуказанное предложеніе справедливо относительно *всякой* неподвижной оси.

Въ уравненія (2) можемъ ввести секторіальныя скорости точекъ системы; - получимъ:

$$2\cdot\frac{d\sum m_i \sigma^{(i)}_{yz}}{dt}=\mathbf{L}_x\,,$$

$$2\cdot\frac{d\sum m_i \sigma^{(i)}_{zx}}{dt}=\mathbf{L}_y\,,$$

$$2\cdot\frac{d\sum m_i \sigma^{(i)}_{xy}}{dt}=\mathbf{L}_z\,,$$

поэтому "законъ моментовъ" называется также: "законъ площадей".

Подобно тому, какъ въ законѣ движенія центра инерціи, и здѣсь мы раздѣлимъ силы на *внутреннія* и *внѣшнія*.

Очевидно:

$$\mathbf{L}_x=\mathbf{L}^{в}_x+\mathbf{L}^{e}_x\,,$$

$$\mathbf{L}_y=\mathbf{L}^{в}_y+\mathbf{L}^{e}_y\,,$$

$$\mathbf{L}_z=\mathbf{L}^{в}_z+\mathbf{L}^{e}_z\,,$$

гдѣ значкомъ $\mathbf{L}^{в}$ обозначаемъ главный моментъ внутреннихъ силъ, а значкомъ $\mathbf{L}^{e}$ главный моментъ внѣшнихъ силъ относительно начала координатъ.

Сумма моментовъ для каждыхъ двухъ равныхъ и противоположныхъ внутреннихъ силъ относительно какой угодно точки, а слѣ-

довательно и относительно какой угодно оси, очевидно, равна нулю; поэтому главный моментъ внутреннихъ силъ всегда равенъ нулю и, слѣдовательно:

$$L_x = 0,\ L_y = 0,\ L_z = 0.$$

Такимъ образомъ, не нарушая общности, мы можемъ написать уравненія (2) въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dl_x}{dt} &= L_x^e, \\ \frac{dl_y}{dt} &= L_y^e, \\ \frac{dl_z}{dt} &= L_z^e. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Изъ уравненій (3) слѣдуетъ, что *внутреннія* силы не оказываютъ вліянія на измѣненіе главнаго момента количествъ движенія точекъ системы.

Въ случаѣ *твердаго тѣла* правыя части уравненій содержатъ моменты только заданныхъ силъ, если тѣло свободно, а если тѣло несвободно, то моменты заданныхъ силъ и реакцій опоръ; - реакціи стержней, которые обусловливаютъ твердость тѣла (неизмѣняемость системы), суть внутреннія силы.

Соединяя для твердаго тѣла уравненія, выражающія законъ движенія центра инерціи и законъ площадей, получимъ шесть уравненій, содержащихъ только однѣ внѣшнія силы, три уравненія (4) главы V и три уравненія (3) главы VI.

Этихъ шести уравненій совершенно достаточно для опредѣленія движенія твердаго тѣла, такъ какъ въ случаѣ свободнаго тѣла, какъ всякой свободной неизмѣняемой системы число независимыхъ координатъ равно шести: $3n - (3n - 6) = 6$, - обыкновенно, три координаты центра тяжести и три Эйлеровыхъ угла; въ случаѣ *несвободнаго* твердаго тѣла число независимыхъ координатъ меньше шести; это число вмѣстѣ съ числомъ неизвѣстныхъ

проекцій реакцій опоръ составитъ шесть.

Разсмотримъ частный случай, когда твердое тѣло вращается вокругъ неподвижной оси; примемъ ее за одну изъ координатныхъ осей, напримѣръ, за ось Oz (черт. 84).

Законъ моментовъ намъ даетъ уравненіе:

$$\frac{dl_z}{dt} = L_z^e ,$$

правая часть котораго содержитъ моменты только заданныхъ силъ, такъ какъ моменты реакцій закрѣпленной оси относительно ея равны нулю.

Каждая точка, напримѣръ, M_i описываетъ окружность радіуса r_i, ея скорость равна:

$$v_i = r_i \cdot \varphi' ,$$

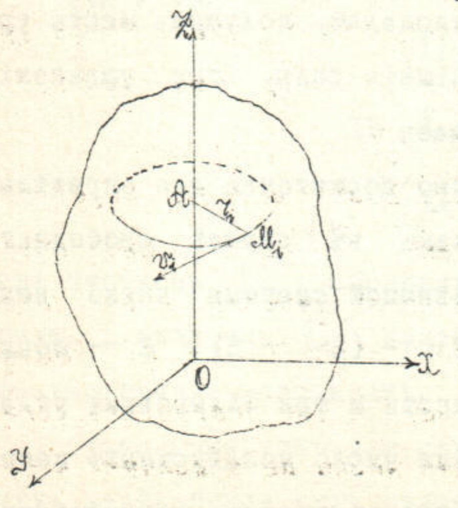
гдѣ φ уголъ поворота тѣла и φ' угловая скорость.

Пусть m_i будетъ масса того элемента тѣла, который мы замѣняемъ матеріальной точкой M_i, тогда количество движенія точки M_i будетъ:

$$m_i v_i = m_i \cdot r_i \cdot \varphi'$$

Моментъ этого количества движенія относительно оси Oz равенъ:

$$m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \varphi' .$$



Чертежъ 84.

Главный моментъ количествъ движенія всѣхъ элементовъ тѣла относительно оси Oz выразится такъ:

$$l_z = \sum m_i r_i^2 \cdot \varphi' ;$$

или, вынося общій множитель φ' за знакъ суммы:

$$l_z = \varphi' \sum m_i r_i^2 .$$

Сумма $\sum m_i r_i^2$ есть моментъ инерціи тѣла относительно оси Oz, который мы обозначимъ черезъ J; тогда:

$$l_z = J.\varphi' ;$$

откуда:

$$\frac{dl_z}{dt} = J\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} .$$

Законъ моментовъ намъ даетъ:

$$J\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} = L_z^e ;$$

это и есть уравненіе вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси.

Главный моментъ данныхъ силъ относительно оси Oz:

$$L_z^e = \sum(x_i Y_i^e - y_i X_i^e) .$$

мы можемъ выразить, вообще говоря, черезъ уголъ φ, угловую скорость φ' и время t, и получимъ одно дифференціальное уравненіе второго порядка относительно φ.

Разсмотримъ весьма важный частный случай, когда *главный моментъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ системы, относительно какой-либо оси равенъ нулю.*

Пусть, напримѣръ:

$$L_x^e = \sum(y_i Z_i - z_i Y_i) = 0 ;$$

тогда будетъ:

$$\frac{dl_x}{dt} = 0$$

и, слѣдовательно:

$$l_x = \text{const}.,$$

или

$$\sum m_i(y_i z_i' - z_i y_i') = \text{const}. \qquad (4)$$

Это уравненіе, по раздѣленіи на 2, можетъ быть написано въ видѣ

$$\sum m_i \sigma_{yz}^{(i)} = const \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4_1')$$

Уравненіе (4_1) или ($4_1'$) представляетъ *первый интегралъ* дифференціальныхъ уравненій движенія системы и называется *интеграломъ площадей* въ плоскости YOZ

Значеніе $const$ въ уравненіи (4_1) находимъ, подставляя начальныя значенія координатъ и проекцій скоростей точекъ системы.

Когда главный моментъ внѣшнихъ силъ

$$L_y^e = 0 ,$$

существуетъ *интегралъ площадей* въ плоскости ZOX :

$$l_y = const.,$$

слѣдовательно:

$$\sum m_i (z_i x_i' - x_i z_i') = const., \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4_2)$$

или

$$\sum m_i \sigma_{zx}^{(i)} = const., \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4_2')$$

Когда главный моментъ внѣшнихъ силъ:

$$L_z^e = 0 ,$$

существуетъ интегралъ площадей въ плоскости XOY

$$l_z = const.;$$

слѣдовательно:

$$\sum m_i (x_i y_i' - y_i x_i') = const., \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4_3)$$

или

$$\sum m_i \sigma_{xy}^{(i)} = const. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4_3')$$

Уравненія (4_1), (4_2), (4_3) или равносильныя имъ уравненія: ($4_1'$), ($4_2'$), ($4_3'$) представляютъ обобщеніе соотвѣтствующихъ уравненій въ случаѣ одной точки, и мы можемъ воспользоваться прежнимъ терминомъ: "законъ сохраненія площадей", хотя площади, описываемыя радіусами векторами проекцій точекъ на

координатную плоскость въ единицу времени, здѣсь уже не сохраняютъ постоянную величину, - говорятъ, что каждое изъ уравненій: (4_1), (4_2), (4_3) выражаетъ *законъ сохраненія площадей* въ соотвѣтствующей координатной плоскости для данной системы.

Такъ какъ всякую неподвижную ось можемъ принять за одну изъ координатныхъ осей, то получается слѣдующее заключеніе:

Если главный моментъ всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ системы, относительно какой-либо неподвижной оси равенъ нулю, то для движенія системы существуетъ интегралъ площадей въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси, выражающій, что сумма массъ точекъ, умноженныхъ на ихъ секторіальныя скорости въ этой плоскости, сохраняетъ постоянную величину.

Если главный моментъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ системы, относительно какой-либо *неподвижной точки*, напримѣръ, относительно начала координатъ, *равенъ нулю*:

$$L^e = 0 ,$$

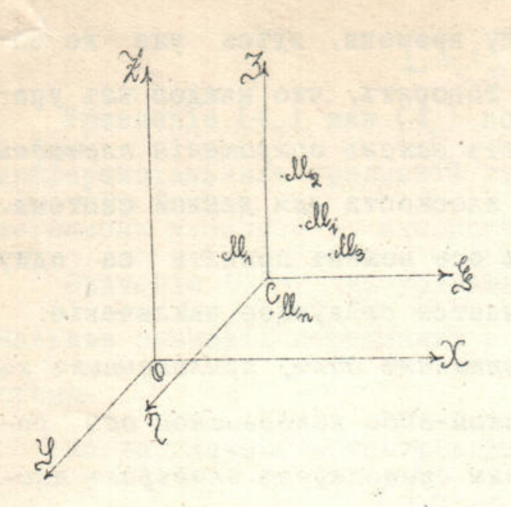
тогда одновременно:

$$L^e_x = 0,\ L^e_y = 0,\ L^e_z = 0 .$$

и, слѣдовательно, существуютъ *три интеграла площадей* въ трехъ перпендикулярныхъ плоскостяхъ, проведенныхъ черезъ эту точку.

§ 3. *"Законъ моментовъ" или "законъ площадей" въ относительномъ движеніи системы по отношенію къ центру инерціи.*

Если мы возьмемъ оси, проведенныя черезъ центръ инерціи системы и движущіяся поступательно съ центромъ инерціи, то зависимость между главнымъ моментомъ количествъ относительнаго движенія системы и главнымъ моментомъ силъ относительно этихъ осей, выражается уравненіями того же вида, что и уравненія (2).



Чертежъ 85.

Пусть $C\ (x_c,\ y_c,\ z_c)$ будетъ центръ инерціи системы (черт. 85). Примемъ его за начало координатъ съ осями $C\xi$, $C\eta$, $C\zeta$, которыя остаются параллельными соотвѣтственно неподвижнымъ осямъ OX, OY, OZ.

Если координаты какой-либо точки системы M_i при новыхъ координатныхъ осяхъ обозначимъ черезъ ξ_i, η_i, ζ_i, то, очевидно, будутъ:

$$x_i = x_c + \xi_i \ ,$$
$$y_i = y_c + \eta_i \ ,$$
$$z_i = z_c + \zeta_i \ .$$

Подставляя эти значенія въ основныя дифференціальныя уравненія (1), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} m_i\xi_i'' &= \mathfrak{X}_i - m_i x_c'' \ , \\ m_i\eta_i'' &= \mathfrak{Y}_i - m_i y_c'' \ , \\ m_i\zeta_i'' &= \mathfrak{Z}_i - m_i z_c'' \ . \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Полагая здѣсь $i = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots n$ получимъ $3n$ уравненій.

Умножимъ третье изъ уравненій (5) на η_i, второе на ζ_i и вычтемъ второе произведеніе изъ перваго, получимъ равенство

$$m_i(\eta_i\zeta_i'' - \zeta_i\eta_i'') = \eta_i\mathfrak{Z}_i - \zeta_i\mathfrak{Y}_i - m_i(\eta_i z_c'' - \zeta_i y_c''),$$

лѣвая часть котораго равна:

$$\frac{d}{dt}\, m_i(\eta_i\zeta_i' - \zeta_i\eta_i').$$

Подобныя равенства можемъ написать для всѣхъ точекъ системы, складывая ихъ, найдемъ

$$\frac{d}{dt}\sum m_i(\eta_i\zeta_i'-\zeta_i\eta_i')=\sum(\eta_i Z_i-\zeta_i Y_i)-x_c''\sum m_i\eta_i+y_c'\sum m_i\zeta_i.$$

Такъ какъ начало новыхъ координатныхъ осей помѣщено въ центрѣ инерціи системы, то суммы произведеній массъ точекъ на ихъ новыя координаты равны нулю:

$$\sum m_i\xi_i=0,$$

$$\sum m_i\eta_i=0,$$

$$\sum m_i\zeta_i=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\sum m_i\xi_i=\sum m_i(x_i-x_c)=\sum m_i x_i-x_c\sum m_i=\sum m_i x_i-M x_c,$$

а эта разность, на основаніи выраженій координатъ центра инерціи (форм. 1, гл. V), равна нулю; такъ же найдемъ, что

$$\sum m_i\eta_i=\sum m_i(y_i-y_c)=0,$$

$$\sum m_i\zeta_i=\sum m_i(z_i-z_c)=0.$$

Принимая это во вниманіе, получаемъ:

$$\frac{d}{dt}\sum m_i(\eta_i\zeta_i'-\zeta_i\eta_i')=\sum(\eta_i Z_i-\zeta_i Y_i);$$

совершенно подобнымъ же образомъ найдемъ

$$\frac{d}{dt}\sum m_i(\zeta_i\xi_i'-\xi_i\zeta_i')=\sum(\zeta_i X_i-\xi_i Z_i),$$

$$\frac{d}{dt}\sum m_i(\xi_i\eta_i'-\eta_i\xi_i')=\sum(\xi_i Y_i-\eta_i X_i).$$

Если главный моментъ количествъ относительнаго движенія

точекъ системы относительно центра инерціи назовемъ черезъ $l^{(c)}$, а относительно осей $C\xi \parallel OX$, $C\eta \parallel OY$, $C\zeta \parallel OZ$ черезъ $l_x^{(c)}$, $l_y^{(c)}$, $l_z^{(c)}$, и главный моментъ силъ относительно центра инерціи черезъ $L^{(c)}$, а относительно тѣхъ же осей черезъ $L_x^{(c)}$, $L_y^{(c)}$, $L_z^{(c)}$, то на основаніи полученныхъ уравненій можемъ написать:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dl_x^{(c)}}{dt} &= L_x^{(c)}, \\ \frac{dl_y^{(c)}}{dt} &= L_y^{(c)}, \\ \frac{dl_z^{(c)}}{dt} &= L_z^{(c)}. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Уравненія (6) того же вида, что и уравненія (2). Вообразимъ неизмѣняемую среду, движущуюся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи системы, точки системы будутъ совершать относительныя движенія въ этой средѣ; уравненія (6) и выражаютъ *законъ моментовъ или законъ площадей въ относительномъ движеніи системы по отношенію къ этой средѣ.*

Раздѣляя силы, дѣйствующія на точки системы, на внѣшнія и внутреннія, найдемъ уравненія, аналогичныя уравненіямъ (3):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dl_x^{(c)}}{dt} &= L_x^{(c)e}, \\ \frac{dl_y^{(c)}}{dt} &= L_y^{(c)e}, \\ \frac{dl_z^{(c)}}{dt} &= L_z^{(c)e}. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Если главный моментъ внѣшнихъ силъ относительно какой-либо оси, проходящей черезъ центръ инерціи, во все время движенія равенъ нулю, напримѣръ, если $L_x^{(c)e} = 0$, тогда:

$$l_x^{(c)} = const \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

и, слѣдовательно

$$\sum m_i \sigma_{\eta\zeta}^{(c)} = const.,$$

т.е. сумма произведеній массъ точекъ на ихъ относительныя секторіальныя скорости въ плоскости $\eta\zeta$ остается постоянною.

Уравненіе (8) выражаетъ *законъ сохраненія площадей въ относительномъ движеніи системы* въ плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи и параллельной пл. ZOY

Если главный моментъ внѣшнихъ силъ относительно центра инерціи во все время движенія равенъ нулю: $\mathbf{L}^{(c)\varepsilon} = 0$, то

$$\mathbf{L}_x^{(c)\varepsilon} = 0,\ \mathbf{L}_y^{(c)\varepsilon} = 0,\ \mathbf{L}_z^{(c)\varepsilon} = 0,$$

и, слѣдовательно, главный моментъ количествъ относительнаго движенія точекъ системы $l^{(c)}$ сохраняетъ при движеніи системы постоянную величину и постоянное направленіе; мы имѣемъ *законъ сохраненія площадей въ трехъ плоскостяхъ,* проходящихъ черезъ центръ инерціи:

$$l_x^{(c)} = const.,$$
$$l_y^{(c)} = const.,$$
$$l_z^{(c)} = const.$$

Въ этомъ случаѣ *законъ сохраненія площадей* имѣетъ мѣсто *во всякой плоскости,* которая проходитъ черезъ центръ инерціи и при движеніи остается себѣ параллельной, потому что всякую такую плоскость, отдѣльно взятую, можемъ считать параллельною одной изъ неподвижныхъ координатныхъ плоскостей.

Разсматриваемый случай представляется, напримѣръ, тогда, когда движется свободное *твердое тѣло,* подчиненное только дѣйствію силъ тяжести: равнодѣйствующая этихъ силъ проходитъ черезъ центръ тяжести (центръ инерціи), и, слѣдовательно, главный моментъ ихъ относительно центра тяжести равенъ нулю ($\mathbf{L}^{(c)} = 0$); моментъ вращательнаго движенія тѣла вокругъ центра тя-

жести $\rho^{(c)}$ сохраняетъ постоянную величину и постоянное направленіе; для движенія тѣла въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть три интеграла площадей въ трехъ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ центръ тяжести:

$$\sum m_i \sigma_{\xi\eta}^{(c)} = const.,$$

$$\sum m_i \sigma_{\eta\zeta}^{(c)} = const.,$$

$$\sum m_i \sigma_{\zeta\xi}^{(c)} = const.$$

Тѣ же три интеграла площадей имѣютъ мѣсто при движеніи системы свободныхъ матеріальныхъ точекъ, на которыя дѣйствуютъ только силы взаимнаго притяженія или отталкиванія, - важнѣйшій примѣръ такой системы представляетъ солнечная система.

ГЛАВА VII.

ЗАКОНЪ ЖИВОЙ СИЛЫ.

§ 1.

Живою силою системы или *кинетическою энергіей* системы матеріальныхъ точекъ (T) называется сумма живыхъ силъ всѣхъ точекъ системъ:

$$T = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i v_i^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Кинетическую энергію системы можно выразить въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ.

Изъ уравненія (1) имѣемъ:

$$T=\sum\frac{m_i}{2}(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2) \qquad (1')$$

Примемъ центръ инерціи системы за начало координатъ съ осями, параллельными осямъ OX, OY, и OZ (черт.31). Очевидно:

$$x_i=x_c+\xi_i\ ,$$
$$y_i=y_c+\eta_i\ ,$$
$$z_i=z_c+\zeta_i\ ;$$

откуда:

$$x_i'=x_c'+\xi_i'\ ,$$
$$y_i'=y_c'+\eta_i'\ ,$$
$$z_i'=z_0'+\zeta_i'\ .$$

Послѣ подстановки получимъ изъ формулы ($1'$):

$$T=\sum\frac{m_i}{2}\left[(x_c'+\xi_i')^2+(y_c'+\eta_i')^2+(z_c'+\zeta_i')^2\right]$$

или

$$T=\sum\frac{m_i(x_c'^2+y_c'^2+z_c'^2)}{2}+\sum\frac{m_i(\xi_i'^2+\eta_i'^2+\zeta_i'^2)}{2}+\sum m_i(x_c'\xi_i'+y_c'\eta_i'+z_c'\zeta_i')$$

Введемъ слѣдующія обозначенія:

Пусть $M=\sum m_i$ - суммѣ массъ всѣхъ точекъ системы - короче, M масса системы;

$v_c=\sqrt{x_c'^2+y_c'^2+z_c'^2}$ - скорость центра инерціи;

$u_i=\sqrt{\xi_i'^2+\eta_i'^2+\zeta_i'^2}$ - относительная скорость точки M_i по отношенію къ средѣ, движущейся поступательно съ центромъ инерціи.

Тогда мы имѣемъ:

$$T=\frac{1}{2}Mv_c^2+\frac{1}{2}\sum m_i u_i^2+x_c'\cdot\sum m_i\xi_i'+y_c'\cdot\sum m_i\eta_i'+z_c'\sum m_i\zeta_i'\ ;$$

но такъ какъ начало координатъ въ центрѣ инерціи, то

$$\sum m_i \xi_i = 0,\ \sum m_i \eta_i = 0,\ \sum m_i \zeta_i = 0,$$

во все время движенія, слѣдовательно, и производныя по времени:

$$\sum m_i \xi_i' = 0,\ \sum m_i \eta_i' = 0,\ \sum m_i \zeta_i' = 0,$$

а тогда находимъ:

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum m_i u_i^2 \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

Уравненіе (2) выражаетъ *теорему* Koenig'*а:*

Живая сила системы равна живой силѣ центра инерціи, въ предположеніи, что масса его равна массѣ всей системы, плюсъ живая сила системы въ ея относительномъ движеніи по отношенію къ центру инерціи (точнѣе по отношенію къ средѣ, движущейся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи).

Выразимъ живую силу *твердаго тѣла,* вращающагося вокругъ неподвижной оси съ угловою скоростью ω. Пусть m_i будетъ масса того элемента тѣла, который мы замѣняемъ точкой M_i, тогда живая сила точки M_i (черт.86) будетъ:

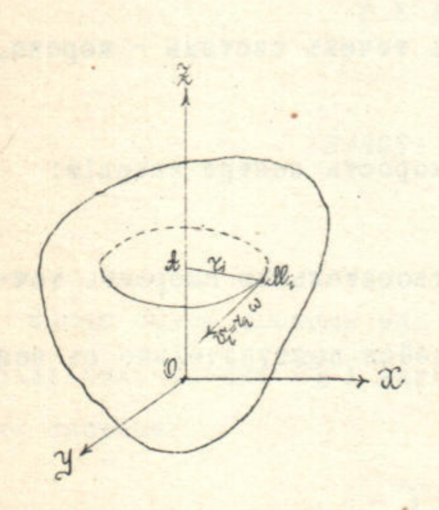
$$\frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2};$$

слѣдовательно, живая сила тѣла:

$$T = \sum \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2},$$

или

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2.$$



Чертежъ 86.

Сумма произведеній массъ точекъ системы на квадраты ихъ разстояній отъ нѣкоторой оси называется *моментомъ инерціи* системы относительно этой оси.

Обозначая моментъ инерціи тѣла относительно оси Oz,

$\sum m_i r_i^2$, через J , имѣемъ:

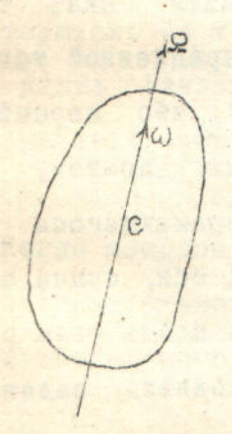
$$T = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 ;$$

слѣдовательно, живая сила твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, равна половинѣ произведенія момента инерціи относительно этой оси на квадратъ угловой скорости.

Найдемъ живую силу *твердаго тѣла*, движущагося *какъ угодно*. *По теоремѣ* Koenig'a:

$$T = M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i u_i^2 .$$

Относительное движеніе тѣла по отношенію къ центру тяжести есть вращеніе тѣла вокругъ центра тяжести. Вращеніе вокругъ точки въ каждый моментъ можетъ быть разсматриваемо, какъ вращеніе вокругъ мгновенной оси, проходящей черезъ эту точку. Такимъ образомъ, относительное движеніе тѣла по отношенію къ центру тяжести можно разсматривать, какъ вращеніе вокругъ мгновенной оси $C\Omega$, проходящей черезъ центръ тяжести C (черт.87), слѣдовательно, на основаніи предыдущаго:



Чертежъ 87.

$$\frac{1}{2} \sum m_i u_i^2 = \frac{1}{2} J_c^{\Omega} \cdot \omega^2 ,$$

гдѣ J_c^{Ω} обозначаетъ моментъ инерціи тѣла относительно мгновенной оси, проходящей черезъ центръ тяжести.

Такимъ образомъ, живая сила твердаго тѣла въ какомъ угодно движеніи равна:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \cdot \omega^2 .$$

Когда тѣло движется поступательно, второй членъ равенъ нулю, и

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 .$$

§ 2. *Работа силъ, приложенныхъ къ системѣ.*

Если X_i, Y_i, Z_i - проекціи равнодѣйствующей *всѣхъ* силъ (задаваемыхъ, реакцій и силъ тренія), приложенныхъ къ точкѣ M_i, то элементарная работа равнодѣйствующей на безконечно маломъ перемѣщеніи равна:

$$X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i$$

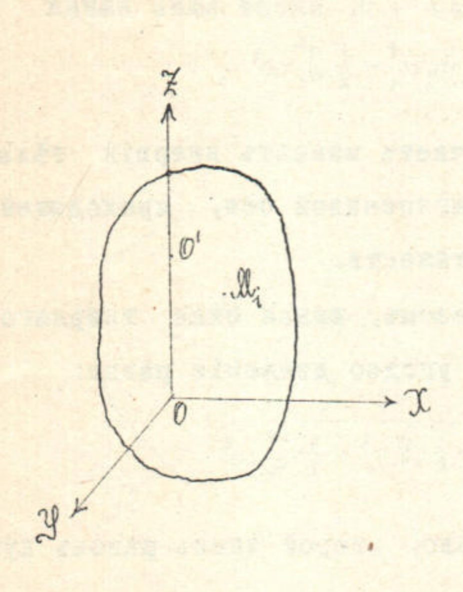
Сумма элементарныхъ работъ для всѣхъ точекъ системы будетъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i).$$

Интегрируя, получимъ сумму работъ на конечномъ перемѣщеніи системы.

Возьмемъ *твердое тѣло*, вращающееся вокругъ неподвижной оси. Знаемъ, что сумма элементарныхъ работъ реакцій тѣхъ связей, которыя обусловливаютъ неизмѣняемость системы (твердость тѣла), равна нулю. Точно также равна нулю работа реакціи какъ той, такъ и другой закрѣпленной точки: O и O' (черт.88), ибо перемѣщенія ихъ равны нулю; поэтому для твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, сумма элементарныхъ работъ всѣхъ силъ равна суммѣ работъ однѣхъ задаваемыхъ силъ, т.е. равна:

$$\sum (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$



Чертежъ 88.

Такъ какъ въ нашемъ случаѣ ось вращенія принята за ось OZ, то для каждой точки тѣла координата $z_i = const$.

поэтому

$$Z_i dz_i = 0 ,$$

и, слѣдовательно, сумма элементарныхъ работъ всѣхъ силъ будетъ:

$$\Sigma(X_i dx_i + Y_i dy_i).$$

Изъ кинематики извѣстно, что

$$x_i' = v_i \cdot \cos(v_i, X) = -y_i \cdot \varphi',$$

$$y_i' = v_i \cdot \cos(v_i, Y) = x_i \cdot \varphi',$$

гдѣ φ - уголъ поворота, слѣдовательно:

$$dx_i = -y_i \cdot d\varphi ,$$

$$dy_i = x_i \cdot d\varphi .$$

Подставляя эти значенія въ выраженіе суммы элементарныхъ работъ, найдемъ:

$$d\varphi . \Sigma(-X_i y_i + Y_i x_i) = L_z . d\varphi .$$

Такимъ образомъ, сумма элементарныхъ работъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на твердое тѣло, вращающееся вокругъ неподвижной оси, равна главному моменту всѣхъ *данныхъ* силъ относительно оси вращенія, помноженному на безконечно малый уголъ поворота: $d\varphi = \omega . dt$, гдѣ ω угловая скорость тѣла.

Когда *твердое тѣло* свободно и движется *какъ угодно*, работа во вращательномъ движеніи вокругъ центра инерціи, на основаніи предидущаго, будетъ:

$$L_c^{\Omega} . d\varphi = L_c^{\Omega} . \omega . dt ,$$

гдѣ L_c^{Ω} главный моментъ всѣхъ данныхъ силъ относительно мгновенной оси $C\Omega$, проходящей черезъ центръ тяжести (черт.88), а ω - угловая скорость.

Работа въ поступательномъ движеніи тѣла вмѣстѣ съ центромъ инерціи равна:

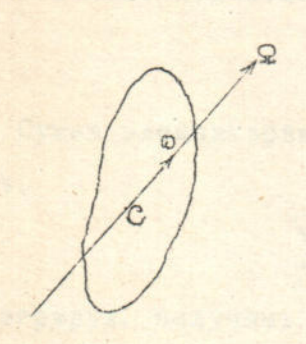
$$dx_c \Sigma X_i + dy_c \Sigma Y_i + dz_c \Sigma Z_i ,$$

такъ какъ

$$dx_i = dx_c\,,\ dy_i = dy_c\,,\ dz_i = dz_c\ .$$

Если геометрическую сумму всѣхъ данныхъ силъ (главный векторъ) обозначимъ черезъ $\mathbf{V}$, а проекціи ея черезъ $\mathbf{V}_x$, $\mathbf{V}_y$, $\mathbf{V}_z$, то работа въ поступательномъ движеніи тѣла вмѣстѣ съ центромъ инерціи будетъ:

$$\mathbf{V}_x.dx_c + \mathbf{V}_y.dy_c + \mathbf{V}_z.dz_c = \mathbf{V}.ds_c.\cos.(\mathbf{V}, ds_c)\ .$$



Чертежъ 89.

Такимъ образомъ, сумма элементарныхъ работъ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, движущемуся какъ угодно, будетъ равна суммѣ двухъ работъ:

$$\mathbf{V}.ds_c\cos.(\mathbf{V}, ds_c) + \mathbf{L}^{\Omega}_c.\omega.dt\ .$$

§ 3. *Законъ живой силы.*

Найдемъ зависимость между *живою силою* системы и *работою* силъ, къ системѣ приложенныхъ. Для этого воспользуемся дифференціальными уравненіями движенія:

$$\left.\begin{aligned} m_i x_i'' &= \mathfrak{X}_i\,, \\ m_i y_i'' &= \mathfrak{Y}_i\,, \\ m_i z_i'' &= \mathfrak{Z}_i\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

гдѣ нужно положить $i = 1, 2, 3, \ldots n$.

Умножимъ первое изъ уравненій (3) на dx_i, второе на dy_i третье на dz_i, и затѣмъ сложимъ; тогда получимъ:

$$m_i(x_i'' x_i' + y_i'' y_i' + z_i'' z_i').dt = \mathfrak{X}_i dx_i + \mathfrak{Y}_i dy_i + \mathfrak{Z}_i dz_i\ ;$$

отсюда

$$\frac{m_i}{2}\,\frac{d(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)}{dt} = \mathfrak{X}_i dx_i + \mathfrak{Y}_i dy_i + \mathfrak{Z}_i dz_i\,,$$

или

$$\frac{d\, m_i v_i^2}{2} = \mathfrak{X}_i dx_i + \mathfrak{Y}_i dy_i + \mathfrak{Z}_i dz_i$$

Последнее равенство может быть написано для каждой точки системы; взявши сумму этихъ равенствъ для всѣхъ точекъ системы, получимъ:

$$dT = \sum_{i=1}^{i=n} (\mathfrak{X}_i dx_i + \mathfrak{Y}_i dy_i + \mathfrak{Z}_i dz_i) \qquad (4)$$

Уравненіе (4) выражаетъ *законъ живой силы* въ дифференціальной формѣ:

Безконечно малое приращеніе живой силы системы точекъ, получаемое при безконечно маломъ перемѣщеніи системы, равно суммѣ элементарныхъ работъ всѣхъ силъ (задаваемыхъ и реакцій), приложенныхъ къ точкамъ системы, на соотвѣтствующихъ безконечно малыхъ перемѣщеніяхъ этихъ точекъ.

Такъ какъ при движеніи точекъ системы всѣ перемѣнныя величины, связанныя съ этими точками, можно разсматривать, какъ функціи отъ одной перемѣнной (напримѣръ, отъ времени t), то мы можемъ взять отъ обѣихъ частей уравненія (4) интегралы (по этой перемѣнной) отъ одного положенія (1) системы, до другого положенія (2); получимъ:

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{(1)}^{(2)} (\mathfrak{X}_i dx_i + \mathfrak{Y}_i dy_i + \mathfrak{Z}_i dz_i) \qquad (5)$$

гдѣ T_1 и T_2 обозначаютъ живую силу системы въ соотвѣтствующихъ крайнихъ положеніяхъ системы: (1) и (2).

Уравненія (5) выражаютъ *законъ живой силы въ конечной формѣ:*

Приращеніе живой силы системы, получаемое при переходѣ системы изъ одного положенія въ другое, равно суммѣ работъ всѣхъ силъ (задаваемыхъ и реакцій), приложенныхъ

къ точкамъ системы, на протяженіи путей, пройденныхъ точками при этомъ переходѣ.

Уравненія (4) и (5) выражаютъ *общій законъ живой силы.*

Законъ живой силы въ нѣкоторыхъ случаяхъ одинъ можетъ определить движеніе системы, именно тогда, когда положеніе системы опредѣляется только одной перемѣнной величиной, т. е. когда число связей на единицу меньше числа координатъ. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что система имѣетъ *одну степень свободы*. Очевидно, для опредѣленія движенія такой системы нужно имѣть одно уравненіе, - его и дастъ законъ живой силы.

Примѣръ системы, имѣющей одну степень свободы, представляетъ твердое тѣло, вращающееся вокругъ неподвижной оси; - всякая машина въ большинствѣ случаевъ можетъ быть разсматриваема, какъ система съ одной степенью свободы.

Замѣтимъ, что уравненіе (4), называемое нерѣдко *уравненіемъ работъ,* со времени Карно есть основное уравненіе *въ теоріи машинъ;* въ большинствѣ случаевъ оно достаточно для опредѣленія хода машины.

Уравненіе работъ въ теоріи машинъ представляется въ видѣ:

$$(T_2+\mathfrak{T}_2)-(T_1+\mathfrak{T}_1)=\mathfrak{P}_m-(\mathfrak{P}_r-P_r);$$

здѣсь T_1, $\mathfrak{T}_1$, T_2, $\mathfrak{T}_2$ суть живыя силы видимыхъ и невидимыхъ движеній въ машинѣ въ двухъ ея положеніяхъ; $\mathfrak{P}_m$, $\mathfrak{P}_r$, P_r - абсолютныя величины работъ на соотвѣтствующемъ пути: $\mathfrak{P}_m$ - движущихъ силъ, $\mathfrak{P}_r$ - полезныхъ сопротивленій и P_r - вредныхъ сопротивленій.

Если система подчинена только *идеальнымъ связямъ*, уравненія которыхъ: $f_1=0, f_2=0, \ldots\ldots f_k=0$ *не содержатъ явно времени* t, то сумма элементарныхъ работъ реакцій каждой связи равна нулю:

$$\lambda_1\sum\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_1}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial f_1}{\partial z_i}dz_i\right)=\lambda_1\frac{df_1}{dt}\cdot dt=0;$$

Въ этомъ случаѣ въ оба уравненія, выражающія законъ живой силы, входятъ работы только *задаваемыхъ* силъ, какъ въ случаѣ системы свободной:

$$dT = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) \quad \ldots\ldots (6)$$

и

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{(1)}^{(2)} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) \quad \ldots\ldots (7)$$

§ 4. *Силы, имѣющія потенціалъ.*

Если задаваемыя силы, приложенныя къ точкамъ системы, таковы, что сумма ихъ элементарныхъ работъ представляетъ полный дифференціалъ нѣкоторой функціи отъ координатъ точекъ, т.е., если удовлетворяется равенство:

$$\sum (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = dU(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n) \quad \ldots\ldots (8)$$

тогда говорятъ, что данныя силы имѣютъ *потенціалъ*.

Функція U называется *силовою функціей* для данныхъ силъ. Очевидно,

$$dU = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} dz_i \right)$$

Сравнивая это равенство съ (8), найдемъ:

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad *)$$

---

*) *Если эти равенства принять какъ опредѣленіе силъ, имѣющихъ потенціалъ, то могутъ представиться случаи, въ которыхъ силовая функція U будетъ содержать, кромѣ координатъ точекъ, и время t явнымъ образомъ: но тогда сумма элементарныхъ работъ будетъ равна*

$$dU - \frac{\partial U}{\partial t} dt .$$

для всѣхъ значеній $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$.

Такимъ образомъ, проекціи на координатныя оси силъ, имѣющихъ силовую функцію, выражаются частными производными отъ этой функціи по соотвѣтствующимъ координатамъ.

Силовая функція можетъ не содержать нѣкоторыхъ координатъ, тогда соотвѣтствующія проекціи силъ равны нулю.

Примѣры силъ, имѣющихъ потенціалъ.

1) *Сила тяжести*. Пусть на точки системы дѣйствуютъ только силы тяжести.

Если ось OZ направлена по вертикали вверхъ, то проекціи силы, приложенной къ точкѣ M_i на оси OX и OY будутъ равны нулю, а проекціи на ось OZ равна $-m_i g$, слѣдовательно, сумма элементарныхъ работъ выразится такъ:

$$\sum -m_i g . dz_i = d . \{-\sum m_i g . z_i\} = dU,$$

и силовая функція будетъ:

$$U = -g . \sum m_i z_i = -M . g . z_c .$$

2) Между точками системы дѣйствуютъ *силы взаимнаго притяженія или отталкиванія, зависящія только отъ разстоянія.*

Сначала разсмотримъ систему изъ двухъ точекъ M_1 и M_2. Обозначимъ разстояніе между ними черезъ $r_{1,2}$, а величину силы, дѣйствующей между этими же точками, черезъ $f_{1,2}(r_{1,2})$. Условимся приписывать этой функціи знакъ $+$, когда сила отталкивательная, и знакъ $-$, когда притягательная.

Проекціи силы, приложенной къ точкѣ M_1, будутъ тогда:

$$f_{1,2}(r_{1,2}) \cdot \frac{x_1 - x_2}{r_{1,2}}, \quad f_{1,2}(r_{1,2}) \cdot \frac{y_1 - y_2}{r_{1,2}}, \quad f_{1,2}(r_{1,2}) \cdot \frac{z_1 - z_2}{r_{1,2}};$$

а проекціи силы, приложенной къ точкѣ M_2, будутъ тѣ же, но съ обратными знаками.

Сумма элементарныхъ работъ представится въ видѣ:

$$\frac{f_{1,2}(r_{1,2})}{r_{1,2}}\left\{(x_1-x_2).dx_1+(y_1-y_2).dy_1+(z_1-z_2).dz_1-(x_1-x_2).dx_2-(y_1-y_2).dy_2-(z_1-z_2).dz_2\right\}=$$

$$=\frac{f_{1,2}(r_{1,2})}{r_{1,2}}\left\{(x_1-x_2).d(x_1-x_2)+(y_1-y_2).d(y_1-y_2)+(z_1-z_2).d(z_1-z_2)\right\}=\frac{f_{1,2}(r_{1,2})}{r_{1,2}}\left\{\frac{1}{2}d\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\right]\right\}=$$

$$=\frac{f_{1,2}(r_{1,2})}{r_{1,2}}.\frac{1}{2}.d(r_{1,2}^2)=f_{1,2}(r_{1,2}).dr_{1,2}.$$

Такимъ образомъ, сумма элементарныхъ работъ равна дифференціалу функціи, которая выражается интеграломъ:

$$\int f_{1,2}(r_{1,2}).dr_{1,2}\ ;$$

слѣдовательно, этотъ интегралъ и будетъ силовая функція:

$$U=\int f_{1,2}(r_{1,2}).dr_{1,2}\ ;$$

Если система состоитъ изъ n точекъ ($n>2$), то для каждой пары точекъ (M_i и M_k) можемъ написать такую силовую функцію, и сумма элементарныхъ работъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ въ системѣ, будетъ равна дифференціалу слѣдующей функціи:

$$U=\sum_{i,k}\int f_{i,k}(r_{i,k}).dr_{i,k}\ ,$$

гдѣ i и k имѣютъ всѣ возможныя различныя значенія отъ 1 до n; эта функція и будетъ силовою функціей для данной системы.

Въ важнѣйшемъ частномъ случаѣ, когда точки системы взаимно притягиваются по закону Ньютона $f_{i,k}(r_{i,k})=-\frac{\varepsilon.m_i.m_k}{r_{i,k}^2}$, силовая функція будетъ:

$$U=\sum_{i,k}\int\frac{\varepsilon.m_i.m_k}{r_{i,k}^2}.dr_{i,k}=\varepsilon.\sum_{i,k}\frac{m_i.m_k}{r_{i,k}}.$$

3) На точки системы дѣйствуютъ *силы притяженія или отталкиванія*, исходящія отъ *внѣшнихъ* (не принадлежащихъ системѣ) центровъ O_1, O_2 . . . . и выражающіяся по величинѣ нѣкоторыми функціями разстояній точекъ отъ этихъ центровъ.

Если вообще на точку M_i дѣйствуетъ со стороны внѣшняго центра O_j сила, величина которой равна нѣкоторой функціи разстоянія O_jM_i, именно $F_{i,j}(r_{i,j})$, причемъ функціи $F_{i,j}(r_{i,j})$ приписываемъ знакъ + въ случаѣ отталкивательной силы и знакъ - въ случаѣ силы притягательной. Тогда сумма элементарныхъ работъ выразится дифференціаломъ функціи

$$U=\sum_{i,j}\int F_{i,j}(r_{i,j}).dr_{i,j},$$

которая и будетъ силовою функціей для разсматриваемаго случая.

Перейдемъ теперь къ уравненію (8).

Интегрируя обѣ части этого уравненія отъ одного положенія (1) системы до какого-либо слѣдующаго ея положенія (2), находимъ:

$$\sum\int_{(1)}^{(2)}(X_i dx_i+Y_i dy_i+Z_i dz_i)=U_2-U_1 \qquad (9)$$

Слѣдовательно, *работа силъ*, приложенныхъ къ системѣ и имѣющихъ потенціалъ, на нѣкоторомъ пути системы, равна *разности значеній силовой функціи для крайнихъ положеній системы.*

Въ большинствѣ случаевъ силовая функція есть функція *однозначная*, и тогда, какъ это слѣдуетъ изъ уравненія (9), сумма работъ силъ на нѣкоторомъ перемѣщеніи системы зависитъ только отъ крайнихъ положеній системы и *не зависитъ* отъ формы того пути, по которому система переходитъ отъ одного положенія въ другое.

Въ частномъ случаѣ, когда система, выйдя изъ положенія (1) и совершивъ нѣкоторый путь, приходитъ обратно въ то же положеніе (1), тогда $U_2=U_1$, и слѣдовательно, сумма работъ силъ на всемъ пути системы въ этомъ случаѣ равна нулю.

§ 5. *Интегралъ живой силы. Законъ сохраненія живой силы. Законъ сохраненія полной энергіи.*

Если задаваемыя силы имѣютъ потенціалъ, тогда, на основаніи уравненій (6) и (8), имѣемъ:

$$dT = dU$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$T = U + h,$$

или

$$T - U = h \qquad (10)$$

гдѣ h - постоянная произвольная, опредѣляемая по начальнымъ даннымъ, т.е. по начальнымъ скоростямъ и начальнымъ координатамъ точекъ системы.

Уравненіе (10) представляетъ *интегралъ* для задачи о движеніи системы при существованіи потенціала.

Этотъ интегралъ называется *интеграломъ живой силы*.

Примѣръ. Задача n тѣлъ - такъ называется задача о движеніи системы n матеріальныхъ точекъ при дѣйствіи внутреннихъ силъ (притяженія или отталкиванія), величины которыхъ суть функціи разстояній; - важнѣйшій частный случай: движеніе n точекъ, взаимно-притягивающихся по закону Ньютона. Задача n тѣлъ допускаетъ интегралъ живой силы; кромѣ того, она допускаетъ, какъ это слѣдуетъ изъ предыдущаго, еще девять интеграловъ: шесть интеграловъ центра инерціи и три интеграла площадей.

При существованіи потенціала, на основаніи уравненій (7) и (9), имѣемъ:

$$T_2 - T_1 = U_2 - U_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

то же уравненіе, очевидно, легко получить и изъ уравненій (10).

Уравненіе (11) выражаетъ *законъ сохраненія живой силы**).

Приращеніе живой силы системы при переходѣ ея изъ одного положенія въ другое, равно разности значеній силовой функціи для крайнихъ положеній системы и, слѣдовательно, не зависитъ отъ путей, по которымъ при этомъ переходѣ перемѣщаются точки системы.

Отсюда слѣдуетъ, что если, при существованіи потенціала, система, выйдя изъ какого нибудь положенія, вернется въ это положеніе, то она возвращается съ тою же живою силою, съ которой вышла:

$$T_2 = T_1 \; .$$

вслѣдствіе того, что

$$U_2 = U_1 \; .$$

------- " -------

Система подчиненная дѣйствію только внутреннихъ силъ, имѣющихъ потенціалъ, называется *консервативною*.

Потенціалъ для внутреннихъ силъ обозначимъ черезъ $U^з$ Обозначимъ черезъ $U^з_0$ значеніе силовой функціи $U^з$ для нѣкотораго опредѣленнаго ("нулевого") положенія системы. Разность

$$U^з_0 - U^з = P \; .$$

называется *потенціальной энергіей системы* и выражаетъ работу внутреннихъ силъ, которую онѣ совершаютъ при переходѣ изъ дан-

---

*) *Предполагается, что силовая функція U однозначная*

наго положенія въ положеніе нулевое.

За нулевое положеніе удобно принимать то, въ которомъ силовая функція имѣетъ наибольшее значеніе, потому что тогда потенціальная энергія будетъ вездѣ величина положительная.

Если система консервативная, то на основаніи уравн. (10)

$$T - \mathfrak{U}^{з} = h \text{ (пост)}.$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ этого равенства по $\mathfrak{U}^{з}_{0}$, получимъ:

$$T + (\mathfrak{U}^{з}_{0} - \mathfrak{U}^{з}) = (h + \mathfrak{U}^{з}_{0}) \text{ (пост)}.$$

или

$$T + P = const \qquad (12)$$

Сумма кинетической энергіи (живой силы) и потенціальной энергіи системы называется *полной энергіей системы*. Обозначимъ ее черезъ E.

Уравненіе (12) выражаетъ *законъ сохраненія энергіи: для консервативной системы полная энергія постоянна*.

$$E = const.$$

Когда на систему, кромѣ внутреннихъ силъ, имѣющихъ потенціалъ, дѣйствуютъ *внѣшнія* силы, тогда полная энергія системы не будетъ оставаться постоянной: приращеніе полной энергіи системы на нѣкоторомъ перемѣщеніи ея будетъ равно суммѣ работъ внѣшнихъ силъ на этомъ перемѣщеніи.

Мы разсмотрѣли, такимъ образомъ, всѣ три закона динамики: законъ движенія центра инерціи, законъ площадей или законъ моментовъ и законъ живой силы, которые, какъ уже было выше указано, имѣютъ мѣсто для движенія матеріи во всѣхъ ея формахъ.

ГЛАВА VIII.

МОМЕНТЫ ИНЕРЦІИ.

Какъ мы уже знаемъ, *моментомъ инерціи* системы относительно оси называется сумма произведеній массъ точекъ системы на квадраты ихъ разстояній отъ этой оси:

$$J = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 .$$

Для *твердаго тѣла* также

$$J = \sum m . r^2 ,$$

гдѣ m обозначаетъ массу какого либо элемента тѣла или той матеріальной точки, которая его замѣняетъ, r - разстояніе этой точки отъ оси вращенія, и число слагаемыхъ безконечно велико; написанная сумма можетъ быть выражена интеграломъ.

Мы будемъ имѣть въ виду, главнымъ образомъ, моменты инерціи тѣла, въ случаѣ надобности выведенныя ниже заключенія легко распространяются на случай любой системы матеріальныхъ точекъ.

Обозначимъ моменты инерціи тѣла или какой-угодно системы вообще, относительно координатныхъ осей OX, OY, OZ соотвѣтственно черезъ A, B и C.

Очевидно:

$$A = \sum m(y^2 + z^2) ,$$

$$B = \sum m(z^2 + x^2) ,$$

$$C = \sum m(x^2+y^2).$$

Эти три момента инерціи найдемъ, зная три суммы:

$$\sum m.x^2, \sum my^2, \sum m.z^2.$$

Въ случаѣ твердаго тѣла эти суммы выражаются интегралами.

Если k плотность тѣла, dv - объемъ элемента тѣла, то масса элемента равна

$$k.dv,$$

и сумма $\sum m.x^2$ выразится интеграломъ:

$$\int k.x^2.dv,$$

но

$$dv = dx.dy.dz,$$

поэтому сумма $\sum m.x^2$ представляется въ видѣ тройного интеграла:

$$\iiint k.x^2.dx.dy.dz.$$

распространеннаго на весь объемъ тѣла.

Подобными интегралами выразятся суммы $\sum my^2, \sum m.z^2$.

Когда тѣло однородной плотности, тогда k - величина постоянная и можетъ быть вынесена за знакъ интеграла; - это обстоятельство облегчаетъ нахожденіе соотвѣтствующихъ интеграловъ.

Моменты инерціи твердаго тѣла относительно координатныхъ осей OX, OY, OZ могутъ быть выражены соотвѣтственно формулами:

$$A = \iiint k.(y^2+z^2).dx.dy.dz,$$

$$B = \iiint k.(z^2+x^2).dx.dy.dz,$$

$$C = \iiint k.(x^2+y^2).dx.dy.dz.$$

§ 1. *Моменты инерціи относительно осей, проходящихъ черезъ начало координатъ. Эллипсоидъ инерціи.*

Найдемъ выраженіе момента инерціи тѣла относительно оси OK (черт.90), проходящей черезъ начало координатъ и составляющей съ координатными осями углы α, β, γ.

Пусть M одна изъ точекъ тѣла.

Квадратъ разстоянія ML ($ML \perp OK$) точки M (x, y, z) отъ оси OK:

$$\overline{ML}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OL}^2;$$

но

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

а

$$\overline{OL} = \overline{OM}.\cos(KOM) = x.\cos\alpha + y.\cos\beta + z.\cos\gamma:$$

слѣдовательно:

$$\overline{ML}^2 = (x^2+y^2+z^2) - (x.\cos\alpha + y.\cos\beta + z.\cos\gamma)^2;$$

или, такъ какъ

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

Чертежъ 90.

$$\overline{ML}^2 = (x^2+y^2+z^2).(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x.\cos\alpha + y.\cos\beta + z.\cos\gamma)^2;$$

откуда:

$$\overline{ML}^2 = (y^2+z^2).\cos^2\alpha + (z^2+x^2).\cos^2\beta + (x^2+y^2).\cos^2\gamma -$$

$$-2yz.\cos\beta.\cos\gamma - 2xz.\cos\gamma.\cos\alpha - 2xy.\cos\alpha.\cos\beta.$$

Тогда моментъ инерціи тѣла относительно оси OK выразится такъ

$$J = \cos^2\alpha.\sum m(y^2+z^2) + \cos^2\beta.\sum m.(x^2+z^2) + \cos\gamma.\sum m(x^2+y^2) -$$

$$-2\cos\beta\cos\gamma.\sum m.yz - 2\cos\gamma.\cos\alpha.\sum m.yx - 2\cos\alpha.\cos\beta.\sum m.x.y.$$

Замѣчаемъ, что коэффиціенты при квадратахъ cosinus'овъ

суть моменты инерціи относительно координатныхъ осей, обозначенные нами черезъ $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Коэффиціенты при удвоенныхъ произведеніяхъ cosinus овъ обозначимъ буквами $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{D}=\sum m.y.z,$$

$$\mathcal{E}=\sum m.z.x,$$

$$\mathcal{F}=\sum m.x.y.$$

Суммы $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, называются *произведеніями инерціи* (products of inertia, produits de l'inertie) или *центробѣжными моментами инерціи;* для тѣла они выражаются также соотвѣтствующими интегралами

$$\mathcal{D}=\int k.y.z.dv=\iiint k.y.z.dx.dy.dz,$$

$$\mathcal{E}=\int k.z.x.dv=\iiint k.z.x.dx.dy.dz,$$

$$\mathcal{F}=\int k.x.y.dv=\iiint k.x.y.dx.dy.dz.$$

Такимъ образомъ, мы можемъ написать моментъ инерціи относительно оси OK въ слѣдующемъ видѣ

$$\mathcal{J}=\mathcal{A}.\cos^2\alpha+\mathcal{B}.\cos^2\beta+C.\cos^2\gamma-2\mathcal{D}\cos\beta\cos\gamma-2\mathcal{E}\cos\gamma\cos\alpha-2\mathcal{F}\cos\alpha\cos\beta \ldots\ldots (1)$$

Эту формулу мы и имѣли въ виду получить; съ помощью ея мы можемъ вычислить моментъ инерціи относительно *любой заданной оси, проходящей черезъ начало координатъ,* если намъ извѣстны моменты инерціи относительно трехъ координатныхъ осей и произведенія инерціи въ трехъ координатныхъ плоскостяхъ.

Весьма часто представляютъ моментъ инерціи въ видѣ произведенія массы на квадратъ нѣкоторой длины:

$$\mathcal{J}=\mathcal{M}.\rho^2;$$

длина ρ называется *плечомъ инерціи* или *радіусомъ инерціи* и

вычисляется по формулѣ:

$$\varrho=\sqrt{\frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{M}}}$$

Моментъ инерціи относительно всякой оси выражается нѣкоторымъ числомъ. Число, выражающее величину $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{I}}}$, можемъ изобразить нѣкоторымъ опредѣленнымъ отрѣзкомъ, выбравши для этого опредѣленный масштабъ. Условимся на каждой оси, проходящей черезъ начало координатъ, откладывать по ту и другую сторону отъ начала длину, изображающую $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{I}}}$, гдѣ $\mathfrak{I}$ моментъ инерціи относительно этой оси.

Геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ $\mathfrak{P}$, для которыхъ радіусъ-векторъ $\mathcal{OP}$ равенъ $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{I}}}$, будетъ *поверхность эллипсоида,* имѣющаго центръ въ началѣ координатъ.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ точку $\mathfrak{P}(x,y,z)$, лежащую на оси $\mathcal{OK}$. Координаты этой точки будутъ:

$$x=\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{I}}}\cos\alpha\ ;\ y=\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{I}}}\cos\beta\ ,\ z=\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{I}}}\cos\gamma.$$

Раздѣлимъ обѣ части уравненія (1) на $\mathfrak{I}$; получимъ

$$1=\mathcal{A}\left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\mathfrak{I}}}\right)^2+\mathcal{B}\left(\frac{\cos\beta}{\sqrt{\mathfrak{I}}}\right)^2+C\left(\frac{\cos\gamma}{\sqrt{\mathfrak{I}}}\right)^2-2\mathcal{D}\left(\frac{\cos\beta}{\sqrt{\mathfrak{I}}}\right)\left(\frac{\cos\gamma}{\sqrt{\mathfrak{I}}}\right)-2\mathcal{E}\left(\frac{\cos\gamma}{\sqrt{\mathfrak{I}}}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\mathfrak{I}}}\right)-2\mathcal{F}\left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\mathfrak{I}}}\right)\left(\frac{\cos\beta}{\sqrt{\mathfrak{I}}}\right)$$

отсюда

$$1=\mathcal{A}x^2+\mathcal{B}y^2+Cz^2-2\mathcal{D}yz-2\mathcal{E}zx-2\mathcal{F}xy \quad \ldots\ldots (2)$$

Уравненіе (2) представляетъ геометрическое мѣсто точекъ $\mathfrak{P}$. Это поверхность второго порядка, при томъ съ центромъ въ началѣ координатъ; такъ какъ моментъ инерціи относительно какой-либо оси вообще не нуль (слѣдовательно, $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{I}}}$ не $=\infty$) то вообще говоря, ни одна изъ точекъ поверхности (2) не находится на безконечности и, слѣдовательно, уравненіе (2) изображаетъ *эллипсоидъ;* только въ одномъ частномъ случаѣ, когда, пренебрегая поперечнымъ сѣченіемъ тѣла, мы разсматриваемъ его какъ прямолинейный отрѣзокъ (тонкая проволока), - уравненіе

(2) изображаетъ *круглый цилиндръ,* ось котораго расположена вдоль по стрѣзку *).

Эллипсоидъ (2) называется *эллипсоидомъ инерцiи* тѣла въ точкѣ O.

Если мы *главныя оси* эллипсоида инерцiи примемъ за координатныя оси, тогда уравненiе эллипсоида инерцiи будетъ:

$$1 = \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$

и, слѣдовательно, *центробѣжные моменты инерцiи въ этомъ случаѣ равны нулю:*

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} = \mathfrak{F} = 0.$$

Главныя оси эллипсоида инерцiи называются *главными осями инерцiи тѣла* и соотвѣтствующiе имъ моменты инерцiи *главными моментами инерцiи тѣла* - въ той точкѣ, съ которою совпадаетъ центръ эллипсоида инерцiи; важное свойство главныхъ осей инерцiи заключается именно въ томъ, что для нихъ центробѣжные моменты инерцiи равны нулю.

Эллипсоидъ инерцiи, центръ котораго находится *въ центрѣ тяжести тѣла,* называется *центральнымъ.*

Главныя оси центральнаго эллипсоида инерцiи называются *главными центральными осями инерцiи тѣла;* а моменты инерцiи относительно этихъ осей называются *главными центральными моментами инерцiи тѣла.*

Если *главныя оси инерцiи* примемъ за оси координатъ, то моментъ инерцiи относительно какой угодно оси, составляющей углы α, β, γ съ этими осями, будетъ:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{A}\cos^2\alpha + \mathfrak{B}\cos^2\beta + \mathfrak{C}\cos^2\gamma, \quad \ldots\ldots (3)$$

такимъ образомъ, моментъ инерцiи тѣла относительно *какой-угодно оси* легко опредѣляется, если извѣстны главные моменты инер-

---

*) *Круглый цилиндръ мы получимъ вообще для всякой системы матерiальныхъ точекъ, расположенныхъ по одной прямой линiи.*

ціи для одной изъ точекъ этой оси.

Если тѣло имѣетъ *плоскость симметріи,* проходящую черезъ разсматриваемую точку, то одна изъ главныхъ осей инерціи въ этой точкѣ будетъ перпендикулярна къ плоскости симметріи.

Въ самомъ дѣлѣ, примемъ плоскость симметріи за плоскость XOY. Вслѣдствіе симметріи каждому элементу тѣла, имѣющему массу m и координаты x, y, z, соотвѣтствуетъ по другую сторону плоскости элементъ, имѣющій также массу m и координаты x, y, z, вслѣдствіе различія знаковъ координаты z, имѣемъ.

$$E=\Sigma m.zx=0\ ,$$

$$D=\Sigma m.yz=0\ ,$$

и уравненіе эллипсоида инерціи будетъ:

$$A.x^2+By^2+Cz^2-2.F\,xy=1$$

Такъ какъ въ это уравненіе z не входитъ въ первой степени, то ось OZ будетъ главною осью эллипсоида, т.е, главною осью инерціи.

Примѣръ. Въ кругломъ однородномъ цилиндрѣ одна изъ плоскостей симметріи есть плоскость, перпендикулярная къ оси цилиндра въ ея серединѣ, значитъ ось цилиндра есть главная центральная ось инерціи.

Затѣмъ, всякая плоскость, проходящая черезъ ось цилиндра, есть также плоскость симметріи, слѣдовательно, вторыя двѣ главныя центральныя оси инерціи суть любыя двѣ прямыя, перпендикулярныя къ оси цилиндра въ ея срединѣ и составляющія между собою прямой уголъ.

Теорема. Главная *центральная* ось инерціи есть вмѣстѣ съ тѣмъ главная ось инерціи для *всякой* точки лежащей на направленіи этой оси

Пусть Oz (черт 91) главная центральная ось инерціи, при чемъ начало координатъ совпадаетъ съ центромъ тяжести.

Докажемъ, что Oz есть въ то же время главная ось инерціи для точки H, находящейся въ разстояніи z_H отъ O

Для этого нужно показать, что для точки H центробѣжные моменты инерціи $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ равны нулю.

Возьмемъ новую систему координатъ съ осями: $H\xi \parallel OX$, $H\eta \parallel OY$ $H\zeta$ совпадаетъ съ Oz. Очевидно, новыя координаты какой-либо точки тѣла будутъ

$$\xi = x,$$
$$\eta = y,$$
$$\zeta = z - z_H$$

Центробѣжные моменты инерціи $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ для точки H представляются въ видѣ:

$$\mathfrak{D} = \sum m\eta\zeta = \sum my(z - z_H) = \sum myz - z_H\sum my \quad \ldots\ldots\ldots^{*)}$$

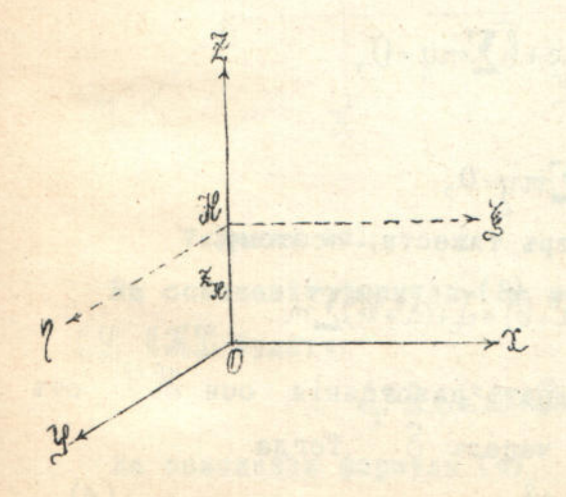
$$\mathfrak{E} = \sum m\zeta\xi = \sum mx(z - z_H) = \sum mxz - z_H\sum mx \quad \ldots\ldots\ldots^{*)}$$

Но

$$\sum myz = 0,$$

и

$$\sum mzx = 0,$$



Чертежъ 91

какъ центробѣжные моменты инерціи для точки O, точно также

$$\sum mx = 0 \quad и \quad \sum my = 0,$$

такъ какъ начало координатъ

---

*) *Изъ этихъ формулъ очевидно, что если главная ось инер-*

въ центрѣ тяжести; - такимъ образомъ центробѣжные моменты $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ для точки $\mathcal{H}$ равны нулю.

§ 2. *Моменты инерціи относительно паралельныхъ осей.*

Найдемъ связь между моментами инерціи тѣла относительно паралельныхъ осей, изъ которыхъ одна проходитъ черезъ центръ тяжести.

Пусть центръ тяжести тѣла находится въ началѣ координатъ.

Обозначимъ моментъ инерціи тѣла относительно оси OZ черезъ J_c.

Очевидно:

$$J_c = \sum m.(x^2+y^2).$$

Найдемъ моментъ инерціи J_k относительно оси KL, паралельной OZ и пересѣкающей плоскость XOY въ точкѣ K, координаты которой обозначимъ черезъ a и b (черт.92):

$$J_k = \sum m[(x-a)^2+(y-b)^2] = \sum m.(x^2+y^2) + \sum m.(a^2+b^2) - 2\sum m.(ax+by);$$

но

$$\sum m.(ax+by) = a.\sum m.x + b.\sum my = 0,$$

такъ какъ

$$\sum m.x = 0 \text{ и } \sum my = 0,$$

ибо начало координатъ есть центръ тяжести; поэтому:

$$J_k = \sum m.(x^2+y^2) + \sum m.(a^2+b^2) = J_c + (a^2+b^2)\sum m.$$

Очевидно, (a^2+b^2) есть квадратъ разстоянія оси KL отъ оси OZ, которое мы обозначимъ черезъ δ. Тогда

$$J_k = J_c + M.\delta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

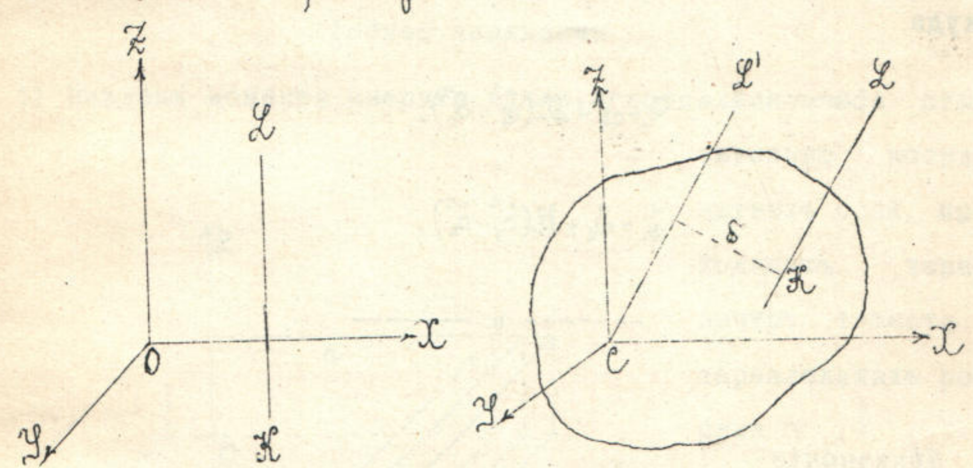
ціи для нѣкоторой точки проходитъ черезъ центръ тяжести, то она будетъ главною центральною осью инерціи.

Такимъ образомъ, *моментъ инерціи относительно какой-либо оси равенъ моменту инерціи относительно оси параллельной, проходящей черезъ центръ тяжести, плюсъ произведеніе массы тѣла на квадратъ кратчайшаго разстоянія между этими осями.*

Такъ какъ это произведеніе величина всегда положительная, то отсюда слѣдуетъ, что *центральный моментъ инерціи есть наименьшій изъ всѣхъ моментовъ инерціи относительно параллельныхъ осей.*

Зная три главныхъ центральныхъ момента инерціи тѣла A, B, C, мы легко можемъ опредѣлить моментъ инерціи тѣла относительно какой-угодно оси.

Пусть требуется найти моментъ инерціи J_L относительно оси KL (черт. 93), составляющей съ направленіями координатныхъ осей углы α, β, γ.



Чертежъ 92. Чертежъ 93.

На основаніи формулы (3) моментъ инерціи относительно оси $CL' \parallel KL$ будетъ:

$$J_{L'} = A.\cos^2\alpha + B.\cos^2\beta + C.\cos^2\gamma .$$

На основаніи формулы (4)

$$J_L = J_{L'} + M.\delta^2 ;$$

слѣдовательно:

$$J_z = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma + M.\delta^2.$$

Такимъ образомъ мы легко найдемъ моментъ инерціи тѣла относительно *какой-угодно оси,* если намъ будутъ извѣстны три главныхъ центральныхъ момента инерціи тѣла.

Съ помощью формулы (4) легко найти зависимость между моментами инерціи J_1 и J_2 относительно двухъ какихъ-угодно параллельныхъ осей, отстоящихъ отъ центра тяжести соотвѣтственно на разстояніяхъ δ_1 и δ_2.

Если моментъ инерціи относительно оси, параллельной даннымъ и проходящей черезъ центръ тяжести, обозначимъ черезъ J_c, тогда на основаніи формулы (4):

$$J_1 = J_c + M.\delta_1^2,$$

$$J_2 = J_c + M.\delta_2^2;$$

откуда

$$J_1 - J_2 = M.(\delta_1^2 - \delta_2^2),$$

и

$$J_1 = J_2 + M(\delta_1^2 - \delta_2^2).$$

Примѣчаніе.

Нерѣдко говорятъ о моментахъ инерціи нѣкоторой *площади;* соотвѣтствующія формулы получаемъ изъ предыдущихъ, полагая $m = dS$, гдѣ dS есть элементъ площади.

Принимая плоскость данной площади S за плоскость XOY, имѣемъ для всѣхъ элементовъ площади $z = 0$ моменты инерціи будутъ

$$A = \iint_S y^2 dx.dy,$$

$$B = \iint_S x^2 dx.dy,$$

$$C = A + B;$$

произведенія инерціи

$$D = E = 0,$$

$$F = \iint_S x.y.dx.dy;$$

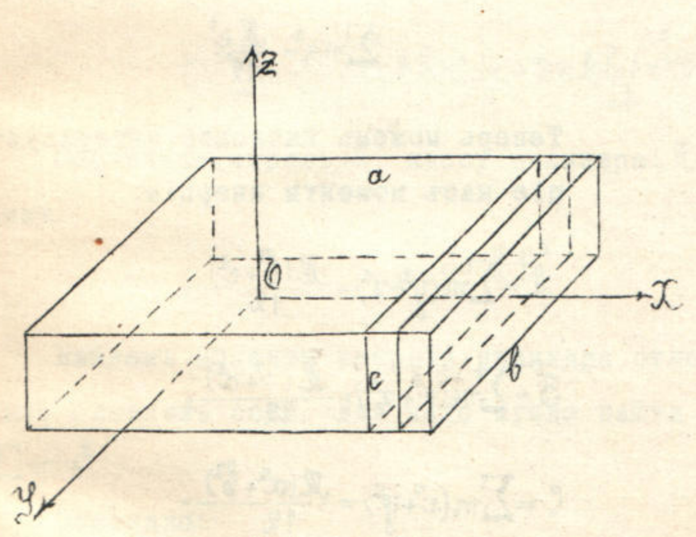
эллипсоидъ инерціи для точки O въ пересѣченіи съ плоскостью XOY даетъ эллипсъ

$$Ax^2 + By^2 - 2Fxy = 1,$$

который и называется "эллипсъ инерціи" данной площади въ точкѣ O.

§ 3. *Примѣры опредѣленія моментовъ инерціи тѣлъ однородной плотности.*

1) Найдемъ моменты инерціи *прямого параллелепипеда* относительно координатныхъ осей, проходящихъ черезъ центръ тяжести и параллельныхъ ребрамъ a, b, c (черт.94).



Чертежъ 94.

Для этого, какъ мы знаемъ нужно найти три суммы

$$\Sigma mx^2, \Sigma my^2, \Sigma m.z^2$$

или соотвѣтствующіе имъ интегралы

Чтобы найти $\Sigma m.x^2$, дѣлимъ параллелепипедъ плоскостями, параллельными плоскости XOY, на безконечно малые параллеле-

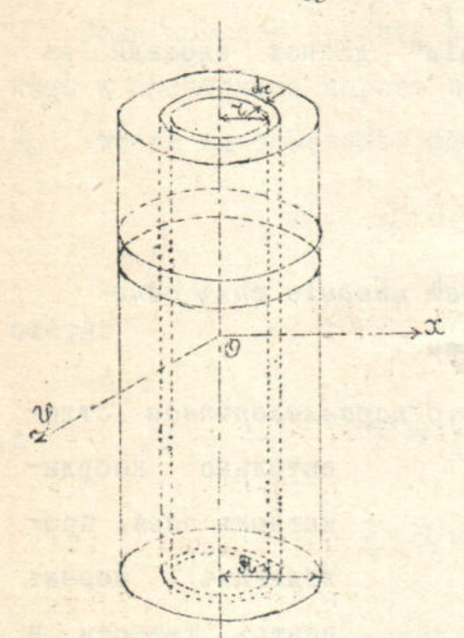
пипеды; возьмемъ слой безконечно малой толщины dx.

Масса этого слоя будетъ:

$$m = k.bc.dx,$$

гдѣ k - плотность тѣла, а такъ какъ для всѣхъ элементовъ выдѣленнаго слоя x одно и то же, то моментъ инерціи слоя будетъ: $k.b.c.x^2.dx$, и, слѣдовательно:

$$\sum mx^2 = 2\int_0^{\frac{a}{2}} k.b.c.x^2 dx = 2k.b.c\int_0^{\frac{a}{2}} x^2 dx = 2k.b.c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{k.b.c.a^3}{12}.$$



Чертежъ 95.

Но $k.b.c.a$ есть масса всего параллелепипеда, которую мы обозначимъ через M; слѣдовательно

$$\sum m.x^2 = \frac{M.a^2}{12};$$

Аналогичнымъ способомъ найдемъ:

$$\sum my^2 = \frac{M.b^2}{12},$$

и

$$\sum m.z^2 = \frac{M.c^2}{12}$$

Теперь можемъ написать интересующіе насъ моменты инерціи:

$$A = \sum m(y^2 + z^2) = \frac{M(b^2 + c^2)}{12},$$

$$B = \sum m(z^2 + x^2) = \frac{M(c^2 + a^2)}{12},$$

$$C = \sum m(x^2 + y^2) = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}.$$

2) Найдемъ моменты инерціи *круглаго цилиндра*, радіуса R и высоты h, относительно координатныхъ осей, проходящихъ черезъ центръ тяжести (черт.95).

Найдемъ сначала моментъ инерціи относительно оси цилиндра Oz:

$$C = \sum m.r^2$$

Раздѣлимъ цилиндръ на безконечно тонкіе цилиндрическіе слои; возьмемъ слой безконечно малой толщины dr , внутренній радіусъ котораго r.

Объемъ такого слоя будетъ равенъ:

$$[\pi(r+dr)^2 - \pi r^2]h = [2r.dr - (dr)^2]\pi.h.$$

Пренебрегая безконечно малою величиной второго порядка $(dr)^2\pi.h$, получимъ объемъ слоя:

$$2\pi.h.r.dr,$$

откуда масса его:

$$2k.\pi.h.r.dr$$

Такъ какъ всѣ элементы слоя находятся въ одномъ и томъ же разстояніи r отъ оси Oz , то моментъ инерціи его будетъ:

$$2\pi.k.h.r^3.dr.$$

Такимъ образомъ:

$$C = \sum m.r^2 = \int_0^R 2\pi.k.h.r^3.dr = 2\pi.k.h\int_0^R r^3.dr = 2k.\pi.h\frac{R^4}{4}.$$

Обозначая через M массу цилиндра $(M = k.\pi.R^2.h)$, получимъ:

$$C = \frac{1}{2}.M.R^2.$$

Найдемъ моментъ инерціи цилиндра относительно двухъ другихъ главныхъ осей, для чего нужно найти суммы $\sum mx^2$, $\sum m.y^2$, $\sum m.z^2$

Очевидно:

$$\sum m.(y^2+z^2) = \sum m.(x^2+z^2),$$

откуда:

$$\sum mx^2 = \sum my^2.$$

Таким образомъ, найденный нами моментъ инерціи

$$C = \sum m(x^2+y^2) = 2\sum mx^2 = 2\sum my^2;$$

откуда:

$$\sum mx^2 = \sum my^2 = \frac{C}{2} = \frac{1}{4}MR^2.$$

Найдемъ сумму

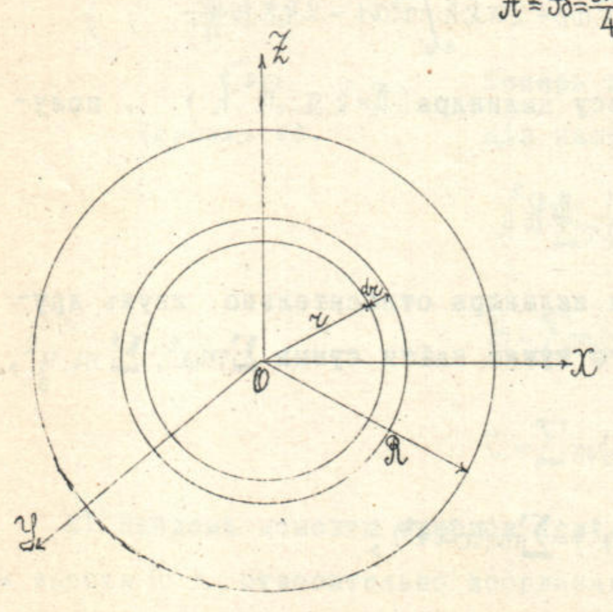
$$\sum mz^2.$$

Раздѣлимъ цилиндръ на безконечно тонкіе слои плоскостями, параллельными плоскости XOY; возьмемъ слой безконечно малой толщины dz. Объемъ элементарнаго слоя будетъ: $\pi R^2 dz$, масса $k\pi R^2 dz$, а моментъ инерціи $k\pi R^2 z^2 dz$, такъ какъ для всѣхъ элементовъ слоя z одно и то же. Таким образомъ:

$$\sum mz^2 = 2\int_0^{\frac{h}{2}} kR^2\pi z^2 dz = 2k\pi R^2\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\frac{h}{2}} = 2k\pi R^2\frac{h^3}{24} = \frac{Mh^2}{12};$$

слѣдовательно:

$$A = B = \frac{M}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right).$$



Чертежъ 96.

3) Найдемъ моментъ инерціи *шара*, радіуса R, относительно какой-либо оси, проходящей черезъ центръ шара.

Раздѣлимъ шаръ шаровыми поверхностями на безконечно тонкіе сферическіе слои. Возьмемъ слой безконечно малой толщины dr, вну-

тренній радіусъ котораго равенъ r (черт.96).

Объемъ такого слоя будетъ:

$$\frac{4}{3}\pi(r+dr)^3-\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}[r^3+3r^2dr+3r(dr)^2+(dr)^3-r^3]\pi.$$

Пренебрегая безконечно малыми величинами второго и третьяго порядка, получимъ, что объемъ слоя равенъ $4\pi r^2 dr$, масса его $k.4\pi r^2 dr$, а слѣдовательно, $\sum m r^2$ для слоя будетъ равна

$$k.4\pi r^4 dr$$

Для всего шара сумма $\sum m r^2$ выразится тогда такъ:

$$\sum m r^2=\int_0^R 4\pi k r^4 dr=$$

$$=4\pi k\frac{R^5}{5}=\frac{3}{5}MR^2,$$

гдѣ $M=k.\frac{4}{3}\pi r^3$ - масса шара.

Но

$$\sum m r^2=\sum m(x^2+y^2+z^2)=$$

$$=3\sum mx^2=3\sum my^2=3\sum mz^2;$$

слѣдовательно:

$$\sum mx^2=\sum my^2=\sum mz^2=\frac{1}{5}MR^2.$$

Такимъ образомъ, находимъ, что для шара моменты инерціи будутъ:

$$A=B=C=\frac{2}{5}MR^2.$$

ГЛАВА IX.

Движеніе твердаго тѣла.

Положеніе твердаго тѣла опредѣляется, какъ извѣстно, изъ Кинематики, вообще *шестью координатами;* поэтому для опредѣленія движенія твердаго тѣла при дѣйствіи данныхъ силъ достаточно имѣть *шесть дифференціальныхъ уравненій.*

Законъ движенія центра инерціи и законъ моментовъ даютъ эти уравненія.

Пусть тѣло *свободно*. Обозначимъ: черезъ M массу тѣла; x_c, y_c, z_c - координаты его центра тяжести; $l_x^{(c)}$, $l_y^{(c)}$, $l_z^{(c)}$ моменты количества движенія тѣла относительно осей, проведенныхъ черезъ центръ тяжести параллельно неподвижнымъ координатнымъ осямъ; V_x, V_y, V_z - проекціи главнаго вектора задаваемыхъ силъ, къ тѣлу приложенныхъ, такъ что:

$$V_x = \sum X_i,$$

$$V_y = \sum Y_i,$$

$$V_z = \sum Z_i;$$

$L_x^{(c)}$, $L_y^{(c)}$, $L_z^{(c)}$ - главные моменты этихъ силъ относительно осей, проведенныхъ черезъ центръ тяжести параллельно неподвижнымъ координатнымъ осямъ. Дифференціальныя уравненія движенія *свободнаго* твердаго тѣла представляются тогда въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} M\cdot x_c'' &= V_x, \\ M\cdot y_c'' &= V_y, \\ M\cdot z_c'' &= V_z. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

$$\frac{dl_x^{(c)}}{dt}=L_x^{(c)},\ \frac{dl_y^{(c)}}{dt}=L_y^{(c)},\ \frac{dl_z^{(c)}}{dt}=L_z^{(c)} \quad \ldots\ldots \quad (II)$$

такъ какъ главный векторъ и главный моментъ реакціи связей, обусловливающихъ неизмѣняемость системы (твердость тѣла), какъ силъ внутреннихъ, равны нулю.

Если тѣло *несвободно*, то въ правыя части уравненій (I) нужно ввести еще проекціи реакцій опоръ, а въ правыя части уравненій (II) моменты этихъ реакцій относительно осей, проведенныхъ, какъ выше указано, черезъ центръ тяжести.

Въ случаѣ несвободнаго тѣла, имѣющаго неподвижно закрѣпленную точку, удобнѣе брать, вмѣсто трехъ уравненій (II), три уравненія (III), содержащіе *моменты относительно координатныхъ осей* OX, OY, OZ, *начало которыхъ* помѣщено въ неподвижной точкѣ:

$$\frac{dl_x}{dt}=L_x,\ \frac{dl_y}{dt}=L_y,\ \frac{dl_z}{dt}=L_z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (III)$$

гдѣ l_x, l_y, l_z, обозначаютъ моменты количества движенія тѣла относительно координатныхъ осей, а L_x, L_y, L_z - суммы моментовъ относительно тѣхъ же осей данныхъ силъ и реакцій опоръ.

Когда тѣло *несвободно*, тогда число независимыхъ координатъ *) менѣе шести, но зато являются неизвѣстныя реакціи.

---

*) *Это число называется числомъ степеней свободы тѣла, напримѣръ, тѣло, одна точка котораго закрѣплена неподвижно, имѣетъ три степени свободы.*

§ 1. *Поступательное движенiе твердаго тѣла.*

При поступательномъ движенiи тѣла всѣ точки его движутся по тождественнымъ кривымъ съ равными и параллельными скоростями; слѣдовательно, всѣ точки движутся такъ, какъ движется центръ тяжести. Такимъ образомъ тѣло не совершаетъ относительнаго движенiя по отношенiю къ центру тяжести; вслѣдствiе этого моментъ количества движенiя относительно центра тяжести будетъ равенъ нулю:

$$l^{(c)}=0,$$

а слѣдовательно:

$$l_x^{(c)}=0,$$

$$l_y^{(c)}=0,$$

$$l_z^{(c)}=0.$$

Это же можетъ быть только тогда, когда главный моментъ всѣхъ силъ относительно центра тяжести равенъ нулю, т.е. когда $L^{(c)}=0$, или

$$L_x^{(c)}=0,\ L_y^{(c)}=0,\ L_z^{(c)}=0\ .$$

Такимъ образомъ, для того, чтобы твердое тѣло совершало *поступательное* движенiе, необходимо, чтобы главный моментъ всѣхъ силъ относительно центра тяжести былъ равенъ нулю, т.е. чтобы всѣ силы, какъ извѣстно изъ курса Статики, приводились къ одной равнодѣйствующей, приложенной къ центру тяжести тѣла.

При дѣйствiи такихъ силъ тѣло будетъ двигаться поступательно, если въ начальный моментъ скорости всѣхъ точекъ равны и параллельны, въ частномъ случаѣ, если тѣло было въ покоѣ.

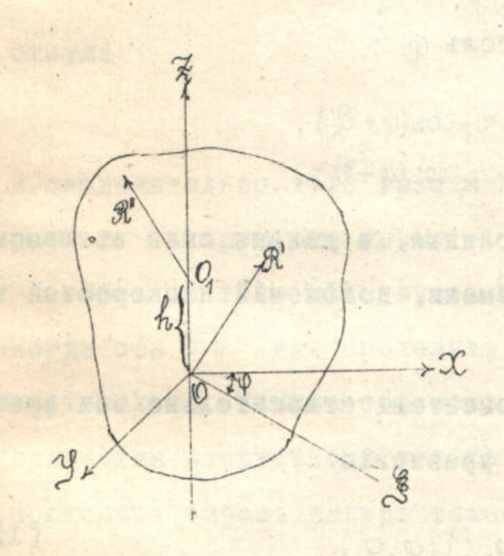
Примѣръ представляетъ движенiе твердаго тѣла при дѣйствiи

силы тяжести, если только въ начальный моментъ ему сообщено поступательное движенiе или оно находилось въ покоѣ.

§ 2. *Вращенiе твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси.*

Ось вращенiя примемъ за ось Oz (черт. 97). Въ данномъ случаѣ тѣло имѣетъ одну степень свободы, и положенiе его вполнѣ опредѣляется угломъ поворота φ

Вслѣдствiе этого для опредѣленiя движенiя тѣла достаточно имѣть одно уравненiе, содержащее одну неизвѣстную функцiю времени, именно уголъ φ.



Чертежъ 97.

Такое уравненiе, какъ уже указано на стр. 284- 285 даетъ намъ законъ моментовъ въ примѣненiи къ оси Oz:

$$\frac{dl_z}{dt} = L_z.$$

Какъ мы знаемъ, $l_z = C\varphi'$ гдѣ C - моментъ инерцiи тѣла относительно оси Oz; поэтому

$$\frac{dl_z}{dt} = C\varphi''.$$

Если радiусъ инерцiи тѣла относительно оси Oz обозначимъ черезъ ϱ, то

$$C = M\varrho^2,$$

и мы можемъ написать:

$$M\varrho^2\varphi'' = L_z$$

Здѣсь L_z - главный моментъ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, задаваемыхъ и реакцiй, относительно оси вращенiя.

Тѣло, вращающееся вокругъ неподвижной оси, можно разсматривать, какъ имѣющее двѣ закрѣпленныя точки O и O_1. Реакцiю

въ точкѣ O обозначимъ черезъ R', а въ точкѣ O_1 черезъ R''

Моменты реакцій относительно оси Oz, очевидно, равны нулю, значитъ:

$$L_z = \sum(x_i Y_i + y_i X_i),$$

если обозначимъ черезъ X_i, Y_i, Z_i проекціи заданныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, а черезъ x_i, y_i, z_i координаты ихъ точекъ приложенія.

Каковы бы ни были данныя силы, L_z всегда можно выразить въ функціи отъ t, φ, φ' *), ибо, какъ извѣстно уже изъ кинематики, координаты x_i, y_i, (z_i = constans) всѣхъ точекъ тѣла выражаются черезъ уголъ φ:

$$x_i = r_i \cos(\varphi + \theta_i),$$
$$y_i = r_i \cos(\varphi + \theta_i),$$

гдѣ r_i и θ_i величины постоянныя, а данныя силы въ самомъ общемъ случаѣ зависятъ отъ времени, положеній и скоростей точекъ тѣла.

Такимъ образомъ, законъ моментовъ относительно оси вращенія тѣла даетъ намъ слѣдующее уравненіе:

$$M \rho^2 \varphi'' = L_z(t, \varphi, \varphi') \qquad (1)$$

Мы получили дифференціальное уравненіе второго порядка того же типа, который имѣли въ случаѣ прямолинейнаго движенія точки.

Къ уравненію (1) *примѣнимо* все то изслѣдованіе дифференціальнаго уравненія, которое изложено въ главѣ II "Кинетики точки".

Интегрируя уравненіе (1), мы найдемъ уголъ φ, какъ функ-

---

*) *Угловая скорость φ' войдетъ въ выраженіе L_z только въ томъ случаѣ, когда при разсмотрѣніи движенія принимается во вниманіе сопротивленіе среды.*

цію отъ времени t, содержащую двѣ постоянныхъ произвольныхъ; эти постоянныя опредѣляются по начальнымъ даннымъ, т. е. по даннымъ величинамъ угла φ и угловой скорости тѣла: φ_0 и $(\varphi')_0$ въ одинъ какой-либо опредѣленный моментъ времени t_0; обыкновенно полагаютъ $t_0 = 0$.

Отмѣтимъ *частный случай*, когда главный моментъ всѣхъ силъ относительно оси Oz равенъ нулю, т.е. когда

$$L_z = 0.$$

Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0,$$

откуда:

$$\varphi' = const.$$

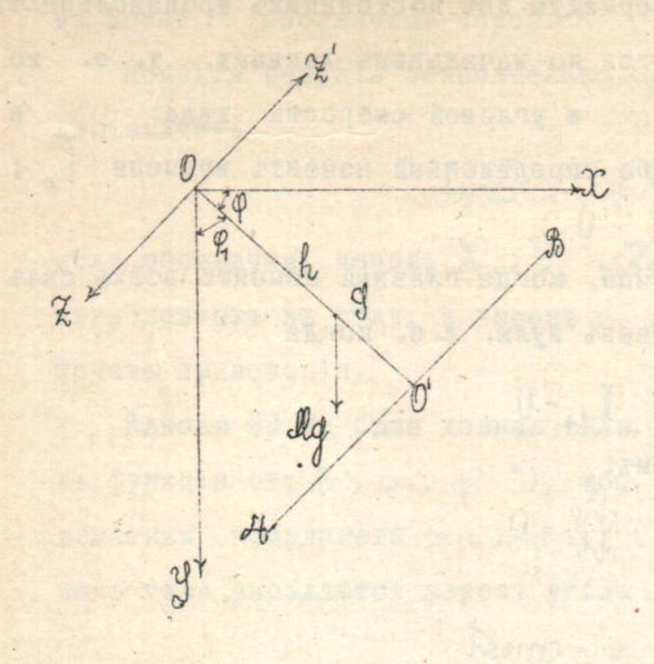
и, слѣдовательно, тѣло вращается *равномѣрно* съ тою угловою скоростью, которую оно имѣло въ начальный моментъ.

Если на тѣло дѣйствуетъ только *сила тяжести*, то $L_z = 0$, когда ось Oz или проходитъ черезъ центръ тяжести тѣла, или вертикальна. Такимъ образомъ, *тяжелое* твердое тѣло *равномѣрно* вращается вокругъ оси только въ двухъ случаяхъ: 1) когда ось проходитъ черезъ центръ тяжести и 2) когда ось вертикальна.

Физическій маятникъ.

Разсмотримъ вращеніе (колебаніе) *тяжелаго* твердаго тѣла вокругъ горизонтальной оси, не проходящей черезъ центръ тяжести.

Ось вращенія zz' пусть будетъ перпендикулярна къ плоскости чертежа; она называется *"осью привѣса"* маятника. Плоскость XOY выберемъ такъ (черт.98), чтобы она заключала въ себѣ центръ тяжести g тѣла; точка O называется *"центромъ*



Чертежъ 98.

привеса". Ось OY направимъ вертикально внизъ. Обозначимъ:

$$Og = h\ ,$$

$$\angle gOx = \varphi\ ;$$

$$\angle gOY = \varphi_1$$

Уголъ φ_1 будемъ выражать положительнымъ числомъ, когда прямая Og находится вправо отъ оси OY ı, отрицательнымъ, когда Og будетъ влѣво отъ OY ; въ такомъ случаѣ $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Согласно уравненію (1) дифференціальное уравненіе движенія будетъ:

$$M.\rho^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M.g.h\cos\varphi\ ,$$

откуда, вводя вмѣсто угла φ, уголъ φ_1, получимъ:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\frac{g.h}{\rho^2}\cdot\sin\varphi_1$$

Составимъ дифференціальное уравненіе движенія математическаго (кругового) маятника (черт.99), для чего воспользуемся извѣстнымъ уравненіемъ:

$$m\frac{dv}{dt} = \mathbf{F}.\cos(\mathbf{F}, v)\ .$$

Очевидно:

$$v = l.\varphi_1'\ ;$$

откуда:

$$\frac{dv}{dt} = l.\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}\ ,$$

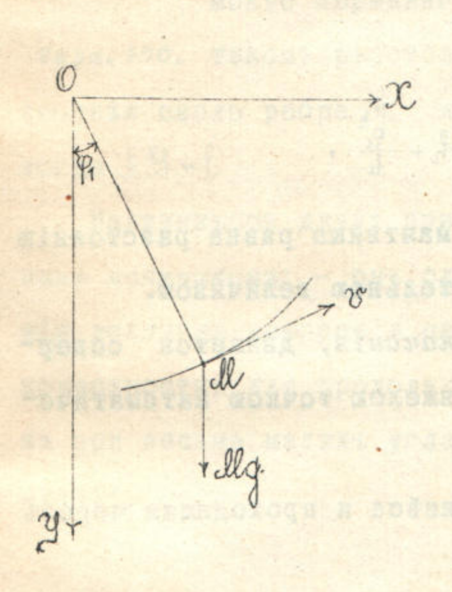
и, слѣдовательно:

$$m.l\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -m.g.\sin\varphi_1 ,$$

откуда:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi_1 .$$

Сравнивая уравненіе движенія физическаго маятника съ уравненіемъ движенія математическаго маятника, замѣчаемъ, что при $l = \frac{\rho^2}{h}$ уголъ φ_1 измѣняется при движеніи обоихъ маятниковъ одинаково, если только уголъ начальнаго отклоненія и начальная угловая скорость будутъ одинаковы.



Чертежъ 99.

Такимъ образомъ, при движеніи физическаго маятника уголъ φ_1 *измѣняется такъ же, какъ и при движеніи математическаго маятника, длина котораго равна квадрату радіуса инерціи физическаго маятника относительно оси привѣса, раздѣленному на разстояніе центра тяжести маятника отъ этой оси;* при этомъ предполагается, что въ начальный моментъ отклоненіе и угловая скорость для обоихъ маятниковъ одинаковы.

Формула для продолжительности одного размаха, выведенная въ § 4 гл. VII "Кинетики точки", имѣетъ мѣсто и въ настоящемъ случаѣ.

Длина: $l = \frac{\rho^2}{h}$ называется *приведенною длиною физическаго маятника*, или длиною математическаго маятника, эквивалентнаго данному физическому.

Если отъ центра привѣса O отложимъ по прямой Og длину $OO' = l = \frac{\rho^2}{h}$, то точка O' будетъ находиться по другую сторону

отъ точки g .

Въ самомъ дѣлѣ, моментъ инерціи тѣла относительно оси Oz будетъ:

$$J = J_c + M.h^2 ,$$

гдѣ J_c - моментъ инерціи относительно оси, проведенной черезъ центръ тяжести, паралельно оси привѣса.

Обозначая черезъ ρ_c соотвѣтствующій радіусъ инерціи, получимъ:

$$M.\rho^2 = M.\rho_c^2 + M.h^2 ;$$

откуда:

$$\rho^2 = \rho_c^2 + h^2 .$$

Такимъ образомъ:

$$OO_1 = l = \frac{\rho_c^2 + h^2}{h} = h + \frac{\rho_c^2}{h} ,$$

т.е., приведенная длина физическаго маятника равна разстоянію Og , сложенному съ нѣкоторою положительной величиной.

Точка O' , называемая *центромъ качанія,* движется совершенно также, какъ если бы она была тяжелою точкою математическаго маятника OO'.

Прямая AB , паралельная оси привѣса и проходящая черезъ точку O' , называется *осью качаній.*

Очевидно:

$$O'g = \frac{\rho_c^2}{h} ,$$

слѣдовательно:

$$Og.O'g = \rho_c^2 .$$

Такимъ образомъ, произведеніе разстояній оси привѣса и оси качаній (или центра привѣса и центра качаній) отъ центра тяжести маятника равно квадрату плеча инерціи для оси, проведенной черезъ центръ тяжести паралельно оси привѣса.

Если мы перевернемъ нашъ маятникъ такъ, что прямая AB сдѣлается осью привѣса, тогда разстояніе ея отъ центра тяже-

сти g будетъ, очевидно, $\frac{\rho_c^2}{h}$, значитъ, разстояніе соотвѣтствующей оси качаній отъ g, согласно сказанному, должно быть равно $\rho_c^2 : \frac{\rho_c^2}{h} = h$, т.е. соотвѣтствующею осью качаній будетъ ось ZZ'

Такимъ образомъ, ось качаній и ось привѣса суть *взаимныя оси.*

Указанное свойство осей привѣса и качаній даетъ возможность точно опредѣлить приведенную длину даннаго физическаго маятника: маятникъ имѣетъ двѣ призмы A и B, изъ которыхъ по крайней мѣрѣ одну можно передвигать; эти призмы устанавливаются на

Черт. 100. такомъ разстояніи другъ отъ друга, чтобы время колебанія около ребра A и около ребра B было одно и то же, тогда $AB = l$.

Маятникъ съ двумя призмами A и B называется *оборотнымъ маятникомъ;* - онъ служитъ, между прочимъ, для опредѣленія величины ускоренія силы тяжести въ данномъ мѣстѣ земной поверхности: для продолжительности T одного размаха маятника при весьма малыхъ углахъ отклоненій имѣемъ извѣстную формулу:

$$T = \pi . \sqrt{\frac{l}{g}},$$

откуда:

$$g = \frac{l . \pi^2}{T^2}.$$

§ 3. *Давленіе вращающагося твердаго тѣла на ось.*

Въ предыдущемъ параграфѣ для опредѣленія вращенія тѣла вокругъ оси при дѣйствіи какихъ-либо данныхъ силъ мы воспользовались лишь однимъ дифференціальнымъ уравненіемъ, именно тѣмъ, которое даетъ законъ моментовъ въ приложеніи къ оси OZ

Остальныя пять дифференціальныхъ уравненій (три уравненія движенія центра тяжести и два уравненія моментовъ) послужатъ намъ для опредѣленія реакцій $\mathcal{R}'$ (X', Y', Z') и $\mathcal{R}''$ (X'', Y'', Z'') (черт.97), а слѣдовательно и *давленій* вращающагося тѣла на ось, - въ томъ предположеніи, что уголъ поворота φ уже опредѣленъ, какъ функція времени.

Уравненія движенія центра тяжести будутъ:

$$\left.\begin{aligned} M.x_c'' &= \sum X_i + X' + X'', \\ M.y_c'' &= \sum Y_i + Y' + Y'', \\ M.z_c'' &= \sum Z_i + Z' + Z'' = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (2)$$

(ибо $z = const.$), а уравненія моментовъ относительно осей OX и OY представятся въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dl_x}{dt} &= \sum(y_i Z_i - z_i Y_i) - h.Y'', \\ \frac{dl_y}{dt} &= \sum(z_i X_i - x_i Z_i) + h.X''. \end{aligned}\right\} \ldots \ldots (3)$$

(моменты реакцій $\mathcal{R}'$ относительно осей OX и OY равны нулю)

Такъ какъ вообще

$$l_x = \sum m_i(y_i.z_i' - z_i.y_i'),$$
$$l_y = \sum m_i(z_i.x_i' - x_i.z_i'),$$

а у насъ $z_i = const.$, то, слѣдовательно, въ нашемъ случаѣ:

$$l_x = -\sum m_i z_i.y_i',$$
$$l_y = \sum m_i z_i.x_i'.$$

Такимъ образомъ, уравненія (3) мы можемъ написать въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} -\sum m_i z_i y_i'' &= \sum (y_i Z_i - z_i Y_i) - h Y'', \\ \sum m_i z_i x_i'' &= \sum (z_i X_i - x_i Z_i) + h X''. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3')$$

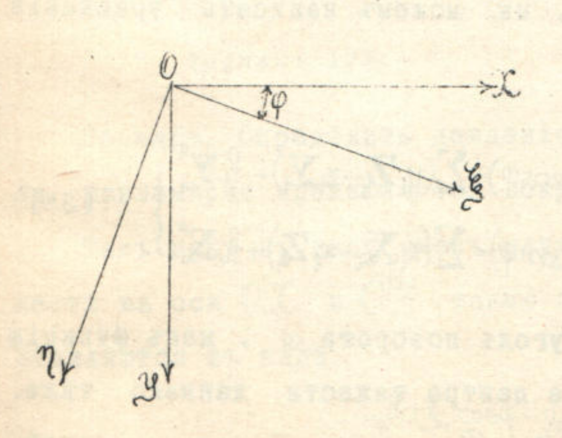
Первыя два изъ уравненій (2) и уравненія (3') дадутъ намъ четыре проекціи X', Y', X'', Y'', третье же изъ уравненій (2) дастъ намъ сумму $Z' + Z''$. Отдѣльно проекцій Z и Z' мы не найдемъ, такъ какъ у насъ всего пять уравненій, а неизвѣстныхъ проекцій шесть.

Примемъ плоскость, которая проходитъ черезъ OZ и образуетъ съ OX уголъ φ, за плоскость $\xi O \zeta$ (черт. 101). Тогда, очевидно:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \xi_i \cos\varphi - \eta_i \sin\varphi, \\ y_i &= \xi_i \sin\varphi + \eta_i \cos\varphi, \\ z_i &= \zeta_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Зная положеніе центра тяжести тѣла, т.е. координаты ξ_c, η_c, ζ_c мы по формуламъ (4) найдемъ x_c, y_c, z_c:

$$x_c = \xi_c \cos\varphi - \eta_c \sin\varphi,$$
$$y_c = \xi_c \sin\varphi + \eta_c \cos\varphi,$$
$$z_c = \zeta_c.$$



Чертежъ 101.

Проекціи ускоренія какой-либо точки M_i, какъ извѣстно изъ кинематики, выражаются формулами:

$$x_i'' = -y_i \varphi'' - x_i \varphi'^2,$$
$$y_i'' = x_i \varphi'' - y_i \varphi'^2.$$

Примѣнивши эти формулы къ центру тяжести, мы послѣ подстановки въ уравненіяхъ (2), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} M(\xi_c \sin\varphi+\eta_c\cos\varphi).\varphi''-M.(\xi_c\cos\varphi-\eta_c\sin\varphi).\varphi'^2&=\sum X_i+X'+X'', \\ M.(\xi_c\cos\varphi-\eta_c\sin\varphi).\varphi''-M.(\xi_c\sin\varphi+\eta_c\cos\varphi).\varphi'^2&=\sum Y_i+Y'+Y'', \\ 0=\sum Z_i+Z'+Z''. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(2')$$

Подставляя затѣмъ вышеуказанныя выраженія x_i'' и y_i'' въ лѣвыя части уравненій (3'), получимъ:

$$-\sum m_i.z_i.y_i''=-\varphi''.\sum m_i.z_i.x_i+\varphi'^2.\sum m_i z_i y_i=$$

$$=-\varphi''\{\cos\varphi.\sum m_i.\zeta_i.\xi_i-\sin\varphi.\sum m_i\zeta_i\eta_i\}+\varphi'^2.\{\sin\varphi.\sum m_i\zeta_i\xi_i+\cos\varphi.\sum m_i\zeta_i\eta_i\};$$

$$\sum m_i z_i x_i''=-\varphi''.\sum m_i.z_i.y_i-\varphi'^2.\sum m_i z_i x_i=$$

$$=-\varphi''.\{\sin\varphi.\sum m_i.\zeta_i\xi_i+\cos\varphi.\sum m_i.\zeta_i\eta_i\}-\varphi'^2.\{\cos\varphi.\sum m_i.\zeta_i.\xi_i-\sin\varphi.\sum m_i\zeta_i.\eta_i\}.$$

Замѣчая, что суммы, стоящія въ правыхъ частяхъ этихъ уравненій представляютъ центробѣжные моменты тѣла и вводя принятыя нами для нихъ обозначенія, мы можемъ написать уравненія (3') въ видѣ:

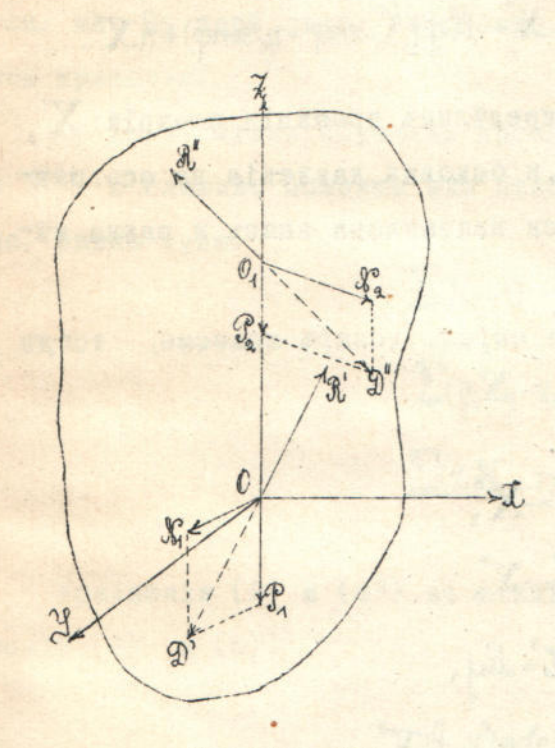
$$\left.\begin{aligned} -\varphi''.(E.\cos\varphi-D.\sin\varphi)+\varphi'^2.(E\sin\varphi+D.\cos\varphi)&=\sum(y_i Z_i-z_i Y_i)-h.Y'', \\ -\varphi''.(E.\sin\varphi+D.\cos\varphi)-\varphi'^2(E.\cos\varphi-D.\sin\varphi)&=\sum(z_i X_i-x_i Z_i)+h X''. \end{aligned}\right\}\ldots(3'')$$

Зная вращеніе тѣла, т.е. уголъ поворота φ, какъ функцію времени, зная затѣмъ положеніе центра тяжести даннаго тѣла, его центробѣжные моменты инерціи D и E, мы можемъ опредѣлить при всякихъ данныхъ силахъ *давленія* на ось: изъ уравненія (3'') находимъ X'' и Y'', а подставляя полученныя отсюда

значенія въ уравненія (2'), найдемъ X'' и Y''; кромѣ того, имѣемъ:

$$Z' + Z'' = -\Sigma Z_i \,,$$

перемѣнивши знаки у полученныхъ значеній, мы найдемъ соотвѣтствующія проекціи давленія $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}''$ (черт. 102).



Чертежъ 102.

Разложимъ каждое изъ давленій $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}''$ на двѣ составляющія, изъ которыхъ одна направлена *вдоль оси*, а другая по перпендикуляру къ оси. Для давленій вдоль оси $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ мы находимъ по предыдущему только ихъ равнодѣйствующую, которая будетъ равна суммѣ проекцій данныхъ силъ на ось вращенія OZ; давленія же, перпендикулярныя къ оси, $\mathcal{N}'$ и $\mathcal{N}''$ опредѣляются вполнѣ каждое отдѣльно; $\mathcal{N}'$ и $\mathcal{N}''$ называются *боковыми давленіями* на ось.

Примѣръ. Опредѣлить давленіе на ось *тяжелаго* твердаго тѣла, равномѣрно вращающагося вокругъ вертикальной оси.

Такъ какъ въ настоящемъ случаѣ $\varphi'' = 0$ и проекціи силы тяжести на оси OX и OY также нули, то уравненія (2') представляются въ видѣ:

$$-M.(\xi_c \cos\varphi - \eta_c \sin\varphi).\varphi'^2 = X' + X'' \,,$$

$$-M.(\xi_c \sin\varphi + \eta_c \cos\varphi).\varphi'^2 = Y' + Y'',$$

$$0 = -Mg + Z' + Z''.$$

предполагая, что ось Oz направлена по вертикали вверхъ.

Далѣе, при $\varphi'' = 0$ i, уравненія (3") примутъ видъ:

$$(E.\sin\varphi + D.\cos\varphi).\varphi'^2 = -y_c.Mg - h.Y'' = -Mg.(\xi_c \sin\varphi + \eta_c \cos\varphi) - h.Y'',$$

$$-(E.\cos\varphi - D\sin\varphi).\varphi'^2 = x_c.Mg + h.X'' = Mg.(\xi_c \cos\varphi - \eta_c \sin\varphi) + hX''.$$

Изъ этихъ уравненій мы и опредѣлимъ проекціи реакцій: X', Y', X'', Y'' а слѣдовательно, и боковыя давленія на ось; равнодѣйствующая давленій вдоль оси направлена внизъ и равна вѣсу тѣла.

Если ось вращенія *проходитъ черезъ центръ тяжести,* тогда $\xi_c = 0$, $\eta_c = 0$, и мы имѣемъ:

$$X' = -X'',$$

$$Y' = -Y'',$$

$$Z' + Z'' = Mg,$$

$$(E.\sin\varphi - D\cos\varphi).\varphi'^2 = -h.Y'',$$

$$-(E.\cos\varphi - D\sin\varphi).\varphi'^2 = hX''.$$

Въ этомъ случаѣ мы видимъ, что боковое давленіе на ось *пропорціонально* квадрату угловой скорости: - какъ въ точкѣ O, такъ и въ точкѣ O_1, боковое давленіе равно:

$$\frac{\sqrt{D^2 + E^2}}{h}.\varphi'^2$$

§ 4. *Свойства главныхъ осей инерціи вращающагося тѣла.*

Разсмотримъ тѣ случаи, когда вращающееся тѣло *не оказываетъ бокового давленія на ось вращенія.*

При этомъ будемъ предполагать, что силы совсѣмъ не приложены къ тѣлу, или онѣ приводятся къ одной силѣ, параллельной оси, или къ парѣ силъ, плоскость которой перпендикулярна къ оси вращенія.

Во всѣхъ этихъ случаяхъ проекціи данныхъ силъ на оси OX и OY и главные моменты ихъ относительно этихъ осей, очевидно, равны нулю:

$$\sum X_i = 0, \sum Y_i = 0,$$

$$\sum (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0,$$

$$\sum (z_i X_i - x_i Z_i) = 0.$$

БИБЛІОТЕКА
ОТД
По каталогу
№
ОФИЦЕРСКОЙ ЖЕЛѢЗНОДОРОЖНОЙ ШКОЛЫ

Уравненія (2) и (3") въ этихъ случаяхъ примутъ видъ уравненій (4) и (5):

$$\left.\begin{aligned} M.x_c'' &= X' + X'', \\ M.y_c'' &= Y' + Y'', \\ M.z_c'' &= Z' + Z'' \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (4)$$

$$\left.\begin{aligned} -(E.\cos\varphi - D.\sin\varphi).\varphi'' + (E.\sin\varphi + D.\cos\varphi).\varphi'^2 &= -h.Y'', \\ -(E.\sin\varphi + D.\cos\varphi).\varphi'' - (E.\cos\varphi - D.\sin\varphi).\varphi'^2 &= h.X'', \end{aligned}\right\} \dots\dots (5)$$

Найдемъ условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы боковое давленіе на ось было равно нулю, т.е., чтобы:

$$X' = 0,\ Y' = 0,\ X'' = 0,\ Y'' = 0.$$

Изъ уравненій (4) слѣдуетъ, что для этого необходимо, чтобы:

$$x_c'' = 0 \ , \ y_c'' = 0 \ ,$$

т.е., чтобы ускореніе центра тяжести было равно нулю; но во вращающемся тѣлѣ только точки, лежащія на оси вращенія, имѣютъ ускореніе, равное нулю, значитъ необходимо, чтобы ось вращенія проходила черезъ центръ тяжести.

Изъ уравненій (5) слѣдуетъ условіе, необходимое для того, чтобы $X'' = 0$ и $Y'' = 0$:

$$-(\mathcal{E}.\cos\varphi - \mathcal{D}.\sin\varphi).\varphi'' + (\mathcal{E}.\sin\varphi + \mathcal{D}\cos\varphi).\varphi'^2 = 0,$$

$$-(\mathcal{E}.\sin\varphi + \mathcal{D}\cos\varphi).\varphi'' - (\mathcal{E}.\cos\varphi - \mathcal{D}.\sin\varphi).\varphi'^2 = 0.$$

Исключая изъ этихъ двухъ уравненій угловое ускореніе, находимъ условіе:

$$[(\mathcal{E}.\cos\varphi - \mathcal{D}.\sin\varphi)^2 + (\mathcal{E}\sin\varphi + \mathcal{D}.\cos\varphi)^2].\varphi'^2 = 0$$

или

$$(\mathcal{E}^2 + \mathcal{D}^2).\varphi'^2 = 0.$$

Если тѣло вращается, то угловая скорость отлична отъ нуля, значитъ, для того, чтобы боковое давленіе на ось равнялось нулю, необходимо, чтобы:

$$\mathcal{E}^2 + \mathcal{D}^2 = 0$$

и это тогда, когда

$$\mathcal{E} = 0 \ \text{и} \ \mathcal{D} = 0 \ .$$

Мы такимъ образомъ нашли, что для того, чтобы тѣло не оказывало бокового давленія на ось, *необходимо*, чтобы ось вращенія проходила черезъ центръ тяжести и чтобы центробѣжные моменты относительно этихъ осей были равны нулю.

Эти условія вмѣстѣ съ тѣмъ достаточны, ибо, если центръ тяжести находится на оси вращенія ($x_c = 0$, $y_c = 0$), тогда:

$$X' + X'' = 0,$$

и

$$Y' + Y'' = 0;$$

а если $\mathfrak{D} = 0$ и $\mathfrak{E} = 0$, то $X'' = 0$ и $Y'' = 0$, а слѣдовательно и $X' = 0$ и $Y' = 0$.

Когда центробѣжные моменты инерціи $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ равны нулю, тогда въ уравненіи эллипсоида инерціи исчезаютъ члены, содержащіе z въ первой степени, значитъ тогда ось Oz направлена по главной оси эллипсоида инерціи; но если ось Oz есть главная ось инерціи для точки O, то она есть главная ось инерціи и для центра тяжести, ибо центръ тяжести находится на оси Oz (см. главу VIII).

Такимъ образомъ, изъ всего сказаннаго мы можемъ сдѣлать слѣдующее заключеніе: *твердое тѣло не оказываетъ боковыхъ давленій на ось, при вышеуказанныхъ предположеніяхъ относительно заданныхъ силъ, тогда и только тогда, когда ось вращенія есть главная центральная ось инерціи тѣла.*

Если тѣло не оказываетъ бокового давленія на ось, значитъ нѣтъ надобности закрѣплять эту ось; вслѣдствіе этого каждая главная центральная ось инерціи тѣла называется *свободною постоянною осью вращенія или перманентною осью вращенія;* - если тѣлу будетъ сообщено вращеніе вокругъ одной изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи, то, при вышеуказанныхъ предположеніяхъ относительно силъ, тѣло будетъ продолжать вращаться вокругъ этой оси, при чемъ ось будетъ сохранять первоначальное направленіе въ пространствѣ и въ томъ случаѣ, когда ни одна изъ ея точекъ не будетъ закрѣплена.

Положимъ, что *точка O оси закрѣплена.* Найдемъ условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы *боковое давленіе на другую точку O_1 равнялось нулю;* при этомъ будемъ предпола-

гать, что данныя силы или не приложены къ тѣлу, или приводятся къ одной силѣ, линія дѣйствія которой проходитъ черезъ точку O, или къ парѣ силъ, плоскость которой перпендикулярна къ оси OO_1

Изъ уравненій (5) слѣдуетъ, что для того, чтобы $X''=0$ и $Y''=0$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{D}=0$ и $\mathfrak{E}=0$, т.е., чтобы ось вращенія была главною осью инерціи тѣла для точки O; но при этомъ центръ инерціи тѣла можетъ быть и *внѣ* оси вращенія.

Такимъ образомъ, если ось вращенія тѣла имѣетъ одну закрѣпленную точку, то боковое давленіе на эту ось, стремящееся повернуть ось около закрѣпленной точки, будетъ равно нулю, при указанныхъ выше предположеніяхъ относительно данныхъ силъ, тогда и только тогда, когда эта ось будетъ *главною осью инерціи тѣла для закрѣпленной точки*.

Отсюда слѣдуетъ, что если возьмемъ за ось вращенія тѣла главную ось инерціи для какой-либо точки, то для того, чтобы, при указанныхъ выше предположеніяхъ относительно данныхъ силъ, тѣло вращалось вокругъ этой оси, не заставляя ее измѣнить направленіе, необходимо и достаточно, чтобы вышеупомянутая точка этой оси была закрѣплена; - *главная ось инерціи тѣла въ какой-угодно точкѣ есть перманентная ось вращенія, когда эта точка закрѣплена*.

Въ заключеніе укажемъ два *слѣдствія*, вытекающія изъ предыдущаго.

1) Пусть тѣло *свободно* и силъ къ нему не приложено. Если мы сообщимъ тѣлу угловую скорость вокругъ главной *центральной оси инерціи*, то тѣло будетъ продолжать вращаться съ тою же угловою скоростью вокругъ той же оси, которая будетъ сохранять неизмѣннымъ свое направленіе.

Если же мы сообщимъ тѣлу угловую скорость вокругъ какой

либо другой оси, то съ теченіемъ времени ось вращенія тѣла будетъ измѣнять свое направленіе.

2) Пусть тѣло имѣетъ *закрѣпленную точку* и данныя силы или не приложены къ тѣлу или приводятся къ одной, проходящей черезъ закрѣпленную точку, какъ это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда на тѣло дѣйствуютъ силы тяжести и центръ тяжести закрѣпленъ.

Если мы сообщимъ тѣлу угловую скорость *вокругъ главной оси инерціи* для закрѣпленной точки, то тѣло будетъ продолжать вращаться съ тою же угловою скоростью вокругъ той же оси, которая будетъ сохранять неизмѣннымъ свое направленіе.

Если же мы сообщимъ тѣлу угловую скорость вокругъ какой либо другой оси, проходящей черезъ закрѣпленную точку, то съ теченіемъ времени ось вращенія тѣла будетъ измѣнять свое направленіе.

На основаніи сказаннаго выше о боковомъ давленіи вращающагося тѣла на ось, при изготовленіи такихъ машинныхъ частей, которыя должны быстро вращаться, какъ, напримѣръ, маховое колесо, паровозное колесо и т.д., для того, чтобы по возможности уменьшить давленіе на ось, всегда стараются такъ обточить эти части, чтобы ось вращенія совпадала съ главною центральною осью инерціи. Если такое совпаденіе не достигнуто, то давленіе на ось, которое, какъ мы видѣли, зависитъ, между прочимъ, отъ $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, выражается въ томъ, что происходятъ колебанія оси и удары ея о подшипники.

§ 5. *Движенiе твердаго тѣла, паралельное неподвижной плоскости.*

Въ Кинематикѣ было указано, что для изученiя движенiя твердаго тѣла, паралельнаго неподвижной плоскости, достаточно разсмотрѣть движенiе той плоской фигуры, которая получается при пересѣченiи тѣла какою-либо плоскостью, паралельной неподвижной; мы возьмемъ ту фигуру, въ плоскости которой заключается центръ тяжести тѣла; эту плоскость примемъ за плоскость XOY, тогда для опредѣленiя движенiя тѣла достаточно опредѣлить движенiе центра тяжести (его координаты x_c, y_c) и уголъ поворота (φ) фигуры вокругъ центра тяжести, какъ функцiи времени.

Для опредѣленiя трехъ неизвѣстныхъ x_c, y_c и φ нужны три уравненiя; два изъ нихъ даетъ законъ движенiя центра тяжести, третье - законъ моментовъ въ примѣненiи къ вращенiю вокругъ оси, проходящей черезъ центръ тяжести.

Если моментъ инерцiи тѣла относительно оси, проведенной черезъ центръ тяжести перпендикулярно къ плоскости фигуры ($\parallel OZ$), обозначимъ черезъ J_c, а сумму моментовъ всѣхъ приложенныхъ къ тѣлу силъ относительно той же оси черезъ L_c, то дифференцiальныя уравненiя движенiя тѣла будутъ:

$$\left.\begin{aligned} M.x_c'' &= \Sigma X, \\ M.y_c'' &= \Sigma Y, \\ J_c.\varphi'' &= L_c. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Если данное тѣло *несвободно*, то въ эти уравненiя мы должны ввести какъ реакцiи (нормальныя) опоръ, такъ и силы тренiя.

При движенiи тѣла по нѣкоторой поверхности, предполагая, что движенiе параллельно нѣкоторой плоскости, различаютъ три случая движенiя; - говорятъ, что тѣло совершаетъ

1) *скольженiе* по поверхности, когда точка прикосновенiя тѣла къ данной поверхности сохраняетъ неизмѣнно свое положенiе на поверхности тѣла, т.е. когда путь, проходимый точкой прикосновенiя по тѣлу равенъ нулю;

2) *катанiе*, когда пути, проходимые точкою прикосновенiя по тѣлу и по поверхности, имѣютъ одинаковую длину;

3) *скольженiе*, соединенное съ *катанiемъ*, когда длины путей, проходимыхъ точкою прикосновенiя по тѣлу и по поверхности имѣютъ различныя длины.

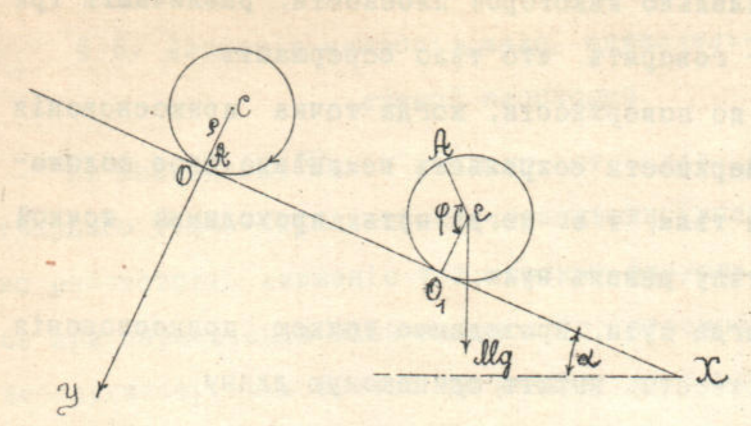
Во всѣхъ этихъ случаяхъ, вообще говоря, существуютъ *силы тренiя*, дѣйствующiя въ общей касательной плоскости.

Опыты показали, что отношенiе силы тренiя къ нормальной реакцiи опоры зависитъ только отъ степени шероховатости соприкасающихся поверхностей, т.е. отъ матерiала и его обработки, и при существованiи скольженiя, хотя бы и соединеннаго съ катанiемъ, равно нѣкоторой постоянной величинѣ, называемой *коэффицiентомъ динамическаго тренiя*; - коэффицiентъ динамическаго тренiя вообще меньше коэффицiента статическаго тренiя.

Примѣръ. Разсмотримъ движенiе тяжелаго, однороднаго круглаго цилиндра по наклонной плоскости, составляющей съ горизонтомъ уголъ α (не $= 90^\circ$), причемъ будемъ предполагать, что существуетъ сила тренiя между плоскостью и цилиндромъ.

Ось OX направимъ по линiи наибольшаго ската внизъ (черт. 102), ось OY также внизъ. Обозначимъ: радiусъ цилиндра ρ, масса его M, коэффицiентъ динамическаго тренiя k.

Пусть въ начальный моментъ



$$t_0 = 0\,;$$
$$(x_c)_0 = 0\,,$$
$$(y_c)_0 = -\rho\,,$$
$$\varphi_0 = 0\,,$$

и скорость цилиндра равна нулю.

Обозначая нормальную реакцію плоскости черезъ

Чертежъ 103.

$\mathfrak{R}$, а силу тренія черезъ $\mathbf{F}$ ($\mathbf{F} = k.\mathfrak{R}$), получимъ на основаніи уравненій (5) слѣдующія дифференціальныя уравненія движенія:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}.x_c'' &= \mathfrak{M}.g.\sin\alpha - \mathbf{F}, \\ \mathfrak{M}.y_c'' &= \mathfrak{M}.g.\cos\alpha - \mathfrak{R}, \\ \frac{1}{2}\mathfrak{M}\rho^2\varphi'' &= \rho.\mathbf{F}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5')$$

Очевидно, разстояніе центра тяжести цилиндра отъ оси OX постоянно:

$$y_c = -\rho\,;$$

слѣдовательно:

$$y_c'' = 0\,,$$

и на основаніи второго изъ уравненій ($5'$) находимъ:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{M}g\cos\alpha$$

Такимъ образомъ, сила тренія будетъ:

$$\mathbf{F} = k.\mathfrak{M}g.\cos\alpha\,.$$

Подставляя найденную величину силы тренія въ первое изъ уравненій ($5'$), получимъ по сокращеніи на $\mathfrak{M}$

$$x_c'' = g.(\sin\alpha - k\cos\alpha) = const.;$$

откуда, принимая во вниманіе начальныя данныя, находимъ:

$$x' = g.t.\cos\alpha.(tg\alpha - k),$$

и

$$x_c = \frac{1}{2} g.t^2.\cos\alpha.(tg\alpha - k).$$

Подставляя величину силы тренія въ третье изъ уравненій (5'), получимъ по сокращеніи на $M.\rho$:

$$\varphi'' = \frac{2.k.g.\cos\alpha}{\rho},$$

откуда, принимая во вниманіе начальныя условія, найдемъ:

$$\varphi' = \frac{2k}{\rho} \cdot g.t.\cos\alpha,$$

и

$$\varphi = \frac{k}{\rho} \cdot g.t^2.\cos\alpha.$$

Разсмотримъ какое движеніе будетъ совершать нашъ цилиндръ при различныхъ значеніяхъ коэффиціента тренія.

Скольженіе будетъ, очевидно, тогда, когда уголъ φ все время будетъ равенъ нулю, что возможно только при $k=0$, т.е. при условіи, что тѣло и наклонная плоскость идеально гладкія.

Разберемъ случай, когда коэффиціентъ k не равенъ нулю. Путь, проходимый точкою прикосновенія по наклонной плоскости, равенъ:

$$OO' = x_c,$$

а путь, проходимый ею по поверхности цилиндра, равенъ:

$$OA = \rho.\varphi.$$

Разница длинъ обоихъ путей будетъ:

$$x_c - \rho.\varphi = \frac{1}{2} \cdot g.t^2.\cos\alpha(tg\alpha - 3k).$$

Отсюда слѣдуетъ, что когда

$$\operatorname{tg}\alpha > 3k,$$

т.е. когда

$$k < \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha,$$

тогда мы имѣемъ случай *скольженія, соединеннаго съ катаніемъ*; когда же

$$k = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha,$$

получаемъ, какъ предѣльный случай для нашихъ формулъ, случай *чистаго катанія;* при большихъ значеніяхъ коэффиціента тренія:

$$k > \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha,$$

наши формулы не имѣютъ мѣста.

ГЛАВА X.

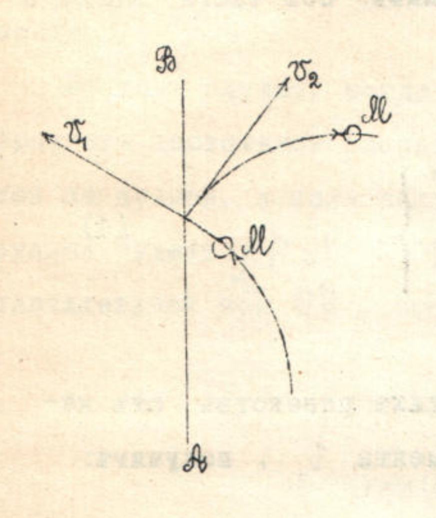
ТЕОРІЯ УДАРА.

§ 1. *Измѣненіе количества движенія и импульсъ силы.*

При движеніи тѣла (въ частности, матеріальной точки), встрѣчаются такіе случаи, въ которыхъ скорость тѣла значительно измѣняется въ чрезвычайно малый промежутокъ времени.

Такое явленіе называется *ударомъ*.

Какъ примѣръ можно указать ударъ упругаго шара о стѣнку. Въ моментъ встрѣчи со стѣнкою AB (черт. 104) шаръ имѣлъ нѣ-



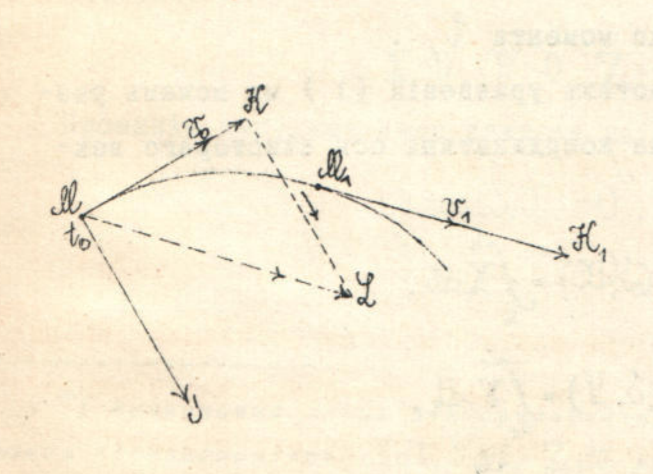
Чертежъ 104.

которую скорость v_1, отражается же онъ отъ стѣнки со скоростью v_2 которая отличается отъ предыдущей, вообще говоря, и по величинѣ и по направленію.

Измѣненіе скорости v_1 въ скорость v_2 происходитъ въ *столь малый* промежутокъ времени, что обыкновенно говорятъ, хотя не точно, что скорость измѣняется *мгновенно*;- перемѣщеніемъ тѣла (точки) за этотъ промежутокъ времени, представляющій продолжительность удара, всегда пренебрегаютъ.

Разсмотримъ приращеніе количества движенія матеріальной точки за нѣкоторый промежутокъ времени, т.е., геометрическую разность между количествами точки въ концѣ и въ началѣ этого промежутка.

Если MK (черт.105) количество движенія точки въ моментъ t_0, M_1K_1 - количество движенія въ моментъ t_1 и если $ML \# M_1K_1$ то KL и будетъ геометрическое приращеніе количества движенія.



Чертежъ 105.

Изъ дифференціальныхъ уравненій движенія точки

$$mx'' = X ,$$

$$my'' = Y ,$$

$$mz'' = Z ,$$

гдѣ X, Y, Z, обозначаютъ проекціи равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ *), помноживъ обѣ части каждаго изъ нихъ на dt, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} d.(m.x') &= \mathbf{X}.dt, \\ d(m.y') &= \mathbf{Y}.dt, \\ d(m.z') &= \mathbf{Z}.dt. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

Интегрируя обѣ части каждаго изъ этихъ равенствъ отъ нѣкотораго момента t_0 до нѣкотораго момента t_1, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} (m.x')_1 - (m.x')_0 &= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{X}.dt, \\ (m.y')_1 - (m.y')_0 &= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{Y}.dt, \\ (m.z')_1 - (m.z')_0 &= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{Z}.dt. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1')$$

Въ лѣвыхъ частяхъ уравненій (1') имѣемъ проекціи на координатныя оси геометрическаго приращенія количества движенія за время отъ момента t_0 до момента t_1.

Интегралы въ правыхъ частяхъ уравненій (1) мы можемъ разсматривать, какъ проекціи на координатныя оси нѣкотораго вектора S:

$$S.\cos(S, X) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{X}.dt,$$

$$S.\cos(S, Y) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{Y}.dt,$$

$$S.\cos(S, Z) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{Z}.dt.$$

---

*) *Въ число этихъ силъ, когда точка несвободна, входитъ и реакція поверхности или реакція кривой.*

Векторъ $\mathcal{S}$, опредѣляемый этими проекціями, называется *импульсомъ силы* $F(X,Y,Z)$ за время отъ момента t_0 до момента t_1 *).

Въ томъ случаѣ, когда сила во все время отъ t_0 до t_1 сохраняетъ постоянное направленіе, то импульсъ ея направленъ по той же прямой, и если величина силы равна F, то величина импульса будетъ $\int_{t_0}^{t_1} F.dt$. Пусть, напримѣръ, сила F остается параллельной оси OZ, тогда, очевидно:

$$\mathcal{S}.\cos(\mathcal{S},X) = \mathcal{S}.\cos(\mathcal{S},Y) = 0,$$

$$\mathcal{S}.\cos(\mathcal{S},Z) = \mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} F dt.$$

Если при постоянствѣ направленія *сила постоянна по величинѣ*, то импульсъ силы равенъ произведенію величины ея на промежутокъ времени:

$$F.(t_1 - t_0).$$

Примѣръ. На точку дѣйствуетъ сила тяжести.

Ось OZ направимъ по вертикали вверхъ.

Очевидно:

$$X=0,\ Y=0,\ Z=-mg.$$

Проекціи импульса силы тяжести на координатныя оси будутъ:

$$\mathcal{S}.\cos(\mathcal{S},X) = 0,$$

$$\mathcal{S}.\cos(\mathcal{S},Y) = 0,$$

---

*) *Безконечно малый векторъ, проекціи котораго на коор. оси равны произведеніямъ:* $X.dt,\ Y.dt,\ Z.dt$ *называется элементарнымъ импульсомъ силы: онъ всегда направленъ по направленію силы и равенъ произведенію величины силы на безконечно малый промежутокъ времени.*

$$S \cos(S, z) = -m g (t_1 - t_0);$$

значитъ импульсъ по величинѣ равенъ:

$$S = m g (t_1 - t_0)$$

и направленъ по вертикали внизъ.

Если сила *измѣняетъ свое направленіе* за время отъ t_0 до t_1, то для опредѣленія импульса силы мы должны знать, какими функціями времени выражаютъ ея проекціи на координатныя оси.

Уравненія ($1'$) выражаютъ слѣдующее предложеніе:

Геометрическое приращеніе количества движенія точки за нѣкоторый промежутокъ времени по величинѣ и направленію равно импульсу силы, къ точкѣ приложенной, за тотъ же промежутокъ времени *).

Это можно выразить и однимъ геометрическимъ уравненіемъ:

$$\overline{mv_1} - \overline{mv_0} = S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Уравненіе (2) позволяетъ намъ рѣшить двѣ задачи.

1) Зная измѣненіе скорости точки за нѣкоторый промежутокъ времени, опредѣлить импульсъ силы за тотъ же промежутокъ.

Зная измѣненіе скорости, знаемъ измѣненіе количества движенія Если MK и ML (черт. 101) количества движенія въ моменты t_0 и t_1, то $MS \# KL$ и есть импульсъ силы.

2) Зная скорость точки въ моментъ t_0 и импульсъ силы за промежутокъ времени отъ t_0 до t_1, опредѣлить скорость въ моментъ t_1.

Если MK - количество движенія въ моментъ t_0, $KL \# MS$ - импульсъ силы за промежутокъ времени отъ t_0 до t_1, то ML есть количество движенія mv_1 въ моментъ t_1; раздѣляя его на m найдемъ скорость v_1

---

*) *Уравненія (1) выражаютъ такое же предложеніе для безконечно малаго промежутка времени.*

Если скорость точки въ моментъ t_0 равна нулю ($v_0 = 0$), тогда импульсъ силы за время отъ t_0 до t_1 равенъ по величинѣ и направленію количеству движенія точки въ моментъ t_1:

$$S = m.v_1 .$$

Въ случаѣ *постоянной* (по величинѣ и направленію) силы $\mathfrak{R}$, на основаніи вышеизложеннаго при $v_0 = 0$ будемъ имѣть:

$$\mathfrak{R}.(t_1 - t_0) = m.v_1 ,$$

откуда

$$v_1 = \frac{\mathfrak{R}(t_1 - t_0)}{m} ,$$

т.е. въ этомъ случаѣ для полученія нѣкоторой скорости мы должны приложить во столько разъ большую силу во сколько разъ будетъ меньше промежутокъ времени, въ теченіе котораго она должна дѣйствовать.

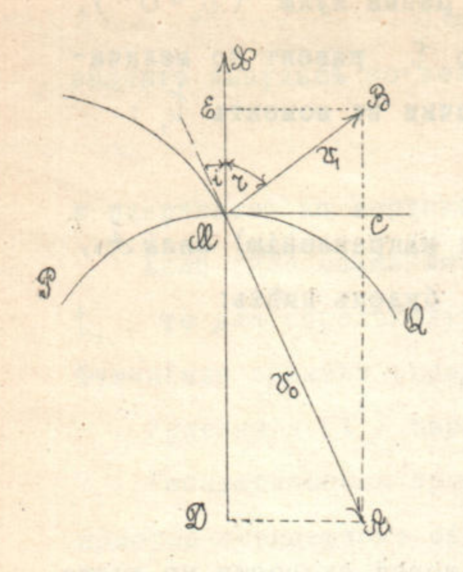
Вообще, сила, которая дѣйствуетъ во время *удара* и обусловливаетъ быстрое, значительное измѣненіе скорости, такъ велика, что по сравненію съ нею такими силами, какъ силы тяжести, силы притяженія и отталкиванія, можно пренебрегать. Въ случаѣ удара шара о стѣнку (точки о поверхность) чрезвычайно быстрое измѣненіе скорости шара (точки) производитъ *реакція* стѣнки (поверхности), направленная по нормали къ послѣдней.

§ 2. *Ударъ точки о поверхность.*

Опредѣлимъ скорость точки послѣ удара ея о неподвижную поверхность.

Пусть точка M (черт. 106) встрѣчаетъ поверхность PQ со скоростью v_0, которая составляетъ съ нормалью N къ поверхно-

----



Чертежъ 106.

сти нѣкоторый уголъ, равный $(180^\circ - i)$, причемъ уголъ i называется *угломъ паденія;* затѣмъ точка отражается отъ поверхности съ нѣкоторою скоростью v_1, которая составляетъ съ нормалью уголъ r, называемый *угломъ отраженія.*

Найдемъ скорость v_1. Пренебрегая, на основаніи сказаннаго въ концѣ § 1, всѣми силами, приложенными къ точкѣ, кромѣ реакціи поверхности, замѣчаемъ, что, такъ какъ эта реакція постоянно направлена по нормали MN, то импульсъ силъ все время направленъ по этой нормали, значитъ и геометрическое измѣненіе количества движенія, а слѣдовательно, и геометрическое измѣненіе скорости, направлено все время по нормали MN.

Такимъ образомъ, измѣненіе скорости $AB \parallel MN$. Отсюда слѣдуетъ, что при ударѣ точки о поверхность, проекціи скоростей v_0 и v_1 на касательную плоскость одинаковы и равны MC (гдѣ $MC \perp MN$), т.е.:

$$v_1 \sin r = v_0 \sin i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Для нахожденія проекціи скорости v_1 на нормаль, надо принять во вниманіе упругія свойства точки и поверхности, о которую точка ударяется.

Степень упругости характеризуется нѣкоторымъ коэффиціентомъ k, который называется *коэффиціентомъ возстановленія.*

Коэффиціентъ возстановленія заключается всегда въ предѣлахъ отъ 0 до 1:

$$0 \leq k \leq 1 .$$

Въ случаѣ совершенной упругости: $k=1$; въ случаѣ совершенной неупругости $k=0$, - въ случаѣ несовершенной упругости:

$$0<k<1.$$

Проекція скорости v_1 на нормаль выражается въ зависимости отъ коэффиціента возстановленія и проекціи скорости v_0 слѣдующимъ образомъ:

$$v_1 . \cos r = k . v_0 . \cos i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3_1)$$

Уравненія (3) и (3_1) даютъ намъ возможность опредѣлить скорость v_1 , если извѣстна скорость v_0 и коэффиціентъ возстановленія: находимъ проекціи скорости v_0 на касательную плоскость и на нормаль:

$$MC = v_0 . \sin i \;,$$

$$MD = v_0 . \cos i \;;$$

множимъ MD на коэффиціентъ возстановленія:

$$ME = k . MD = k . v_0 . \cos i \;;$$

геометрическая сумма векторовъ MC и ME и есть скорость v_1.

Дѣля равенство (3) на (3_1) находимъ:

$$\operatorname{tg} r = \frac{1}{k} \cdot \operatorname{tg} i ,$$

откуда:

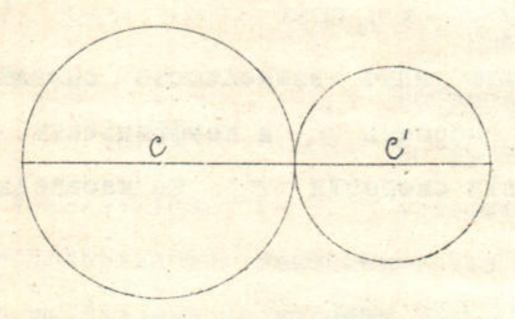
$$k = \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r} ,$$

т.е. коэффиціентъ возстановленія есть отношеніе тангенса угла паденія къ тангенсу угла отраженія, - это обстоятельство позволяетъ намъ опредѣлять коэффиціентъ возстановленія изъ опыта.

§ 3. *Соударенiе шаровъ.* *)

При соударенiи двухъ шаровъ ударъ называется *прямымъ* тогда, когда эти шары не вращаются и при томъ скорости ихъ центровъ направлены по прямой, соединяющей центры.

Пусть даны два шара, центры которыхъ C и C', а массы соотвѣтственно m и m' (черт. 107).



Чертежъ 107.

Обозначимъ: черезъ t_0 тотъ моментъ, въ который шары сталкиваются между собой: скорости шаровъ C и C' въ этотъ моментъ соотвѣтственно черезъ v_0 и u_0, затѣмъ черезъ t_1 тотъ моментъ, когда ударъ окончится, и соотвѣтственныя скорости шаровъ черезъ v_1 и u_1.

Чтобы различать направленiя скоростей, условимся приписывать v_0, u_0, v_1, u_1, знакъ +, когда скорости направлены вправо, и знакъ -, когда онѣ направлены влѣво.

Легко видѣть, что ударъ шаровъ произойдетъ въ моментъ t_0 только при томъ условiи, что $v_0 > u_0$.

Послѣ встрѣчи шаровъ въ одной точкѣ центры ихъ начинаютъ сближаться, такъ что происходитъ деформацiя шаровъ около точки встрѣчи (первый актъ удара). Этой деформацiи противодѣйствуютъ силы реакцiй, которыя стремятся раздвинуть шары и производятъ, слѣдовательно, въ теченiе перваго акта удара отри-

---

*) *Выводы, къ которымъ мы приходимъ въ этомъ §-ѣ, имѣютъ приложенiе, напримѣръ, при разсмотрѣнiи вопросовъ о ковкѣ.*

цательную работу. Въ нѣкоторый моментъ разстояніе между центрами становится наименьшимъ и шары стремятся затѣмъ возстановить свою форму (второй актъ удара), - силы реакцій производятъ положительную работу; наступаетъ опять моментъ, когда шары прикасаются въ одной точкѣ и ударъ оконченъ.

Опредѣлимъ скорости шаровъ *послѣ прямого удара,* если извѣстны скорости до удара.

Воспользуемся прежде всего закономъ движенія центра тяжести. Внѣшними силами, напримѣръ, силами тяжести, мы при ударѣ пренебрегаемъ, принимая во вниманіе лишь реакціи, которыя какъ силы внутреннія, на движеніе центра тяжести не имѣютъ никакого вліянія, слѣдовательно, общій центръ тяжести обоихъ шаровъ движется прямолинейно и равномѣрно и потому послѣ удара онъ имѣетъ ту же скорость, что и до удара. Такъ какъ ударъ прямой, то эта скорость выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{m.v_0 + m'.u_0}{m+m'} = \frac{m.v_1 + m'.u_1}{m+m'},$$

откуда:

$$m.v_0 + m'.u_0 = m.v_1 + m'.u_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Разсмотримъ затѣмъ отдѣльно три случая.

I случай. Ударъ совершенно неупругихъ шаровъ.

Въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто только одинъ первый актъ удара, т.е. шары, сблизившись, деформируются и остаются въ состояніи деформаціи. По окончаніи удара оба шара получаютъ одну и ту же скорость:

$$v_1 = u_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

На основаніи уравненій (4) и (5), находимъ:

$$v_1 = u_1 = \frac{m.v_0 + m'.u_0}{m+m'}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $m = m'$, имѣемъ:

$$v=u=\frac{v_0+u_0}{2}.$$

Посмотримъ, какъ измѣняется *живая сила* при ударѣ совершенно неупругихъ шаровъ. Живая сила въ моментъ t_0 будетъ:

$$\frac{1}{2}\cdot(m\cdot v_0^2+m'\cdot u_0^2),$$

а въ моментъ t_1:

$$\frac{1}{2}(m+m')\cdot v_1^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{(m\cdot v_0+m'\cdot u_0)^2}{m+m'}.$$

Разность живыхъ силъ въ моменты t_0 и t_1 будетъ:

$$\frac{1}{2}\cdot(m\cdot v_0^2+m'\cdot u_0^2)-\frac{1}{2}\cdot\frac{(m\cdot v_0+m'\cdot u_0)^2}{m+m'}=$$

$$=\frac{1}{2(m+m')}\left\{m^2\cdot v_0^2+m\cdot m'\cdot v_0^2+m\cdot m'\cdot u_0^2+m'^2\cdot u_0^2-m^2\cdot v_0^2-2m\cdot m'\cdot v_0\cdot u_0-m'^2\cdot u_0^2\right\}=\frac{m\cdot m'}{2(m+m')}\cdot(v_0^2+u_0^2-2v_0u_0)=$$

$$=\frac{m\cdot m'}{2\cdot(m+m')}\cdot(v_0-u_0)^2.$$

Отсюда видимъ, что разность между живою силою въ моментъ t_0 и живою силою въ моментъ t_1 всегда положительна, слѣдовательно, при неупругомъ ударѣ всегда происходитъ *потеря* живой силы; по закону сохраненія энергіи часть живой силы превращается въ теплоту.

Величина того *импульса,* который реакція производитъ при ударѣ, равна измѣненію количества движенія того или другого шара, - она равна:

$$m'\cdot u_1-m'\cdot u_0$$

Подставляя сюда вмѣсто скорости u_1 найденное для нея выраженіе черезъ u_0 и v_0, получимъ:

$$m'\cdot u_1-m'\cdot u_0=\frac{1}{m+m'}\cdot(m\cdot m'\cdot v_0+m'^2\cdot u_0-m\cdot m'\cdot u_0-m'\cdot u_0^2)=\frac{m\cdot m'}{m+m'}\cdot(v_0-u_0)$$

Если бы мы знали промежутокъ времени, то раздѣливъ на него найденный импульсъ, мы бы опредѣлили *среднюю* величину ре-

акціи.

II случай. Ударъ совершенно упругихъ шаровъ.

Въ этомъ случаѣ за первымъ актомъ удара слѣдуетъ второй актъ, въ теченіе котораго шары возстановляютъ свою первоначальную форму, и ихъ реакціи производятъ положительную работу, равную по величинѣ отрицательной работѣ производимой реакціей во время перваго акта. Такимъ образомъ, вся работа реакціи за время удара равна нулю; поэтому сумма живыхъ силъ послѣ удара равна суммѣ живыхъ силъ до удара:

$$\frac{m.v_1^2}{2}+\frac{m'.u_1^2}{2}=\frac{m.v_0^2}{2}+\frac{m'.u_0^2}{2};$$

откуда имѣемъ:

$$m.(v_1^2-v_0^2)=m'.(u_0^2-u_1^2) \qquad (6)$$

Уравненія (6) и (4) позволяютъ намъ найти неизвѣстныя скорости v_1 и u_1. Изъ уравненія (4) имѣемъ:

$$m.(v_1-v_0)=m'.(u_0-u_1) \qquad (7)$$

Дѣля почленной (6) на (7), находимъ:

$$v_1+v_0=u_1+u_0 \qquad (8)$$

откуда:

$$u_1=v_1+v_0-u_0\ ,$$

и

$$v_1=u_1+u_0-v_0\ .$$

Подставляя въ уравненіе (7) вмѣсто v_1 найденное для него выраженіе черезъ u_1, получимъ:

$$m.(u_1+u_0-2.v_0)=m'.(u_0-u_1)\ .$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ этого уравненія по $m.u_0$ найдемъ:

$$2.m.(u_0-v_0)=(m+m').(u_0-u_1),$$

откуда:

$$u_1 = u_0 + \frac{2m}{m+m'} \cdot (v_0 - u_0) .$$

Въ частномъ случаѣ, когда массы шаровъ равны: $m = m'$, тогда:

$$v_0 = u_0 \quad и \quad u_1 = v_0 ,$$

т.е. шары обмѣниваются скоростями.

III случай. Ударъ не вполнѣ упругихъ шаровъ.

Этотъ случай отличается отъ предыдущаго тѣмъ, что здѣсь во время второго акта удара первоначальная форма шаровъ возстановляется не вполнѣ, поэтому сумма работъ реакцій за оба акта удара будетъ величина отрицательная и, слѣдовательно, имѣетъ мѣсто потеря живой силы.

Въ случаѣ совершенно упругихъ шаровъ уравненіе (8) давало:

$$v_1 - u_1 = u_0 - v_0 ;$$

когда же шары не вполнѣ упруги, имѣемъ:

$$v_1 - u_1 = k \cdot (u_0 - v_0) , \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

гдѣ k коэффиціентъ возстановленія.

Изъ уравненія (9) находимъ:

$$u_1 = v_1 - k \cdot (u_0 - v_0) ,$$

$$v_1 = u_1 - k \cdot (v_0 - u_0) .$$

Подставляя въ уравненіе (7) вмѣсто u_1 его выраженіе черезъ v_1 получимъ:

$$-m \cdot (v_1 - v_0) = m' \cdot u_0 - m' \cdot v_1 + k m' \cdot (u_0 - v_0)$$

Вычитая изъ обѣихъ частей этого равенства $m' v_0$, найдемъ:

$$(m + m') \cdot (v_1 - v_0) = (1 + k) \cdot m' \cdot (u_0 - v_0) ;$$

откуда:

$$v_1 = v_0 + \frac{(1+k) \cdot m'}{m+m'} (u_0 - v_0) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$u_1 = u_0 + \frac{(1+k).m'}{m+m'}.(v_0 - u_0) \ldots\ldots\ldots\ldots (10_1)$$

Формулы (10) и (10_1) суть *общія* для всѣхъ случаевъ прямого удара шаровъ: мы получимъ изъ нихъ скорости v_1 и u_1, полагая $k=0$ въ случаѣ совершенно неупругихъ шаровъ, и, полагая $k=1$, въ случаѣ совершенно упругихъ шаровъ.

Коэффиціентъ возстановленія k опредѣляется изъ опыта слѣдующимъ образомъ: заставляютъ шарикъ падать на неподвижную плоскость, которую, очевидно, можно разсматривать, какъ поверхность шара безконечно большого радіуса и безконечно большой массы.

Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ $m' = \infty$, $u_0 = 0$, и формулы (10) и (10_1) даютъ намъ:

$$v_1 = v_0 - (1+k).v_0 = -k.v_0, \ldots\ldots\ldots\ldots (10')$$

$$u_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (10_1')$$

Если шарикъ падаетъ съ высоты h, то, какъ извѣстно, онъ упадаетъ на плоскость со скоростью:

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Если по отраженіи шарикъ поднимается на высоту h_1, то онъ, очевидно, отразился со скоростью

$$v_1 = \sqrt{2g.h_1}.$$

Такимъ образомъ:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}, \text{ и } h_1 = \frac{v_1^2}{2g}.$$

Принимая во вниманіе уравненіе (10_1), находимъ

$$h_1 = \frac{k^2.v_0^2}{2g} = k^2.h;$$

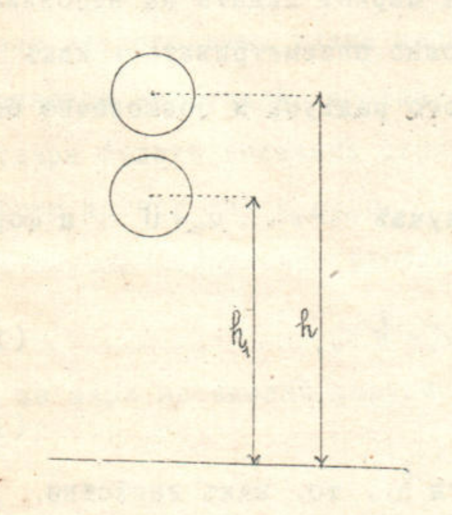
откуда:

$$k^2 = \frac{h_1}{h}, \text{ и } k = \sqrt{\frac{h_1}{h}}.$$

Измѣряя высоты h и h_1, найдемъ по этой формулѣ коэффиціентъ возстановленія. Такимъ путемъ найдемъ для слоновой кости $k = 0,8$, для стали $k = 0,5$.

Все сказанное въ § 3 о *соударенiи шаровъ* можно распространить на случай *какихъ угодно тѣлъ*, если только ударъ прямой, т.е., если соударяющіяся тѣла не вращаются и если скорости ихъ центровъ тяжести направлены по прямой, соединяющей центры.

Примѣръ: вколачиваніе гвоздя молоткомъ.



Чертежъ 108.

§ 4. *Косой ударъ*.

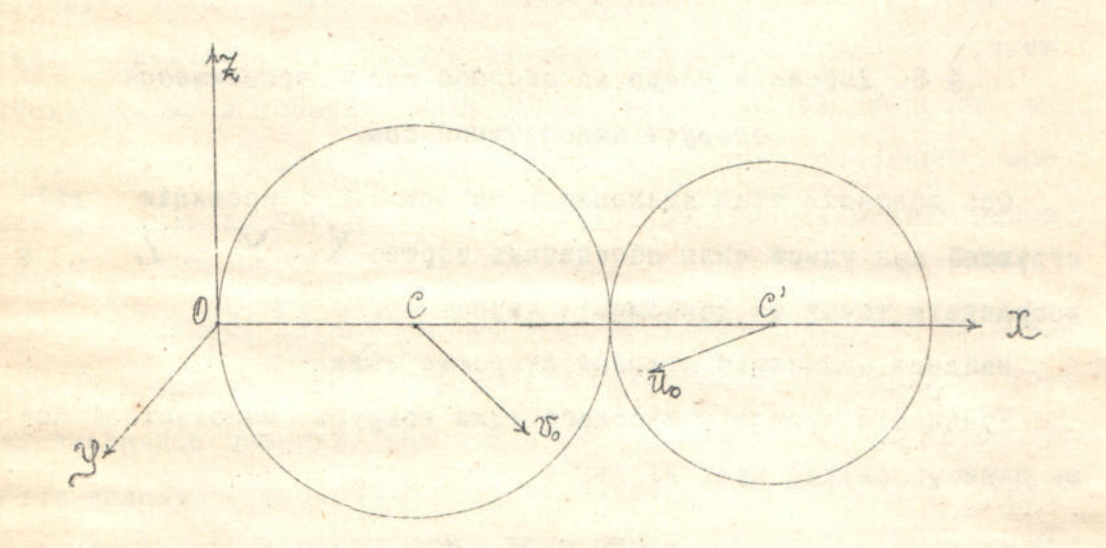
Пусть даны два шара, центры которыхъ суть C и C' (черт. 109); массы соотвѣтственно m и m', скорости въ начальный моментъ удара t_0 соотвѣтственно v_0 и u_0, а въ конечный моментъ t_1 : v_1 и u_1.

Скорости v_0 и u_0 составляютъ съ линіею центровъ углы, не равные нулю и 180°.

На основаніи извѣстнаго закона центръ тяжести каждаго изъ этихъ шаровъ движется такъ, какъ если бы въ немъ была сосредоточена вся масса соотвѣтственнаго шара, и къ нему была при-

ложена реакція другого шара (остальными силами мы пренебрегаэмъ).

Измѣненіе количества движенія каждаго изъ центровъ C и C' по величинѣ и направленію равно импульсу реакціи другого шара, но эта послѣдняя все время направлена по общей нормали (линіи центровъ), слѣдовательно, импульсъ ея направленъ по линіи центровъ, поэтому измѣненіе количества движенія, а слѣдовательно и измѣненіе скорости каждаго центра направлено по той же прямой CC'.



Чертежъ 109.

Принимая линію центровъ за ось OX, мы можемъ, на основаніи только что сказаннаго, утверждать, что проекціи скоростей центровъ C и C' на оси OY и OZ остаются неизмѣнными за все время удара, а измѣняются лишь проекціи этихъ скоростей на ось OX.

Такимъ образомъ, мы можемъ написать:

$$v_1 \cos(v_1, X) = v_0 \cos(v_0, X) + \frac{J}{m}$$

$$v_1 \cos(v_1, Y) = v_0 \cos(v_0, Y),$$

$$v_1 \cdot \cos(v_1, Z) = v_0 \cdot \cos(v_0, Z),$$

$$u_1 \cdot \cos(u_1, X) = u_0 \cdot \cos(u_0, X) - \frac{J}{m},$$

$$u_1 \cdot \cos(u_1, Y) = u_0 \cdot \cos(u_0, Y),$$

$$u_1 \cdot \cos(u_1, Z) = u_0 \cdot \cos(u_0, Z).$$

По отношенію къ проекціямъ скоростей на ось OX примѣнимо все то, что относится къ случаю прямого удара.

§ 5. *Дѣйствіе удара на твердое тѣло, вращающееся вокругъ неподвижной оси.*

Ось вращенія тѣла принимаемъ за ось OZ ; проекціи дѣйствующей при ударѣ силы обозначимъ черезъ $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$, а координаты точки ея приложенія черезъ x, y, z.

Найдемъ *измѣненіе угловой скорости* тѣла.

Уравненіе вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси въ данномъ случаѣ намъ даетъ:

$$M \cdot \rho^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = x \cdot \mathbf{Y} - y \mathbf{X},$$

гдѣ ρ радіусъ инерціи тѣла относительно оси вращенія.

Помножимъ обѣ части этого уравненія на dt и проинтегрируемъ въ предѣлахъ отъ t_0 до t_1 ; при этомъ координаты x и y точки приложенія силы мы вынесемъ за знаки интеграловъ, считая ихъ постоянными на томъ основаніи, что перемѣщеніемъ тѣла за время удара всегда пренебрегаемъ; получимъ:

$$M \cdot \rho^2 \cdot (\omega_1 - \omega_0) = x \cdot \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{Y} \cdot dt - y \cdot \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{X} \cdot dt,$$

(гдѣ ω_0 и ω_1 обозначаютъ угловую скорость въ моменты t_0 и t_1) или

$$\mathcal{M}.\rho^2.(\omega_1-\omega_0)=x.\mathfrak{I}_y-y.\mathfrak{I}_x, \qquad (11)$$

гдѣ $\mathfrak{I}_x$ и $\mathfrak{I}_y$ суть проекціи на оси OX и OY импульса силы, дѣйствующей при ударѣ.

Уравненіе (11) выражаетъ, что при дѣйствіи удара на твердое тѣло, вращающееся вокругъ неподвижной оси, произведеніе момента инерціи на приращеніе угловой скорости равно моменту импульса относительно оси вращенія.

Съ помощью уравненія (11) мы можемъ по даннымъ: удару (импульсу), угловой скорости въ началѣ удара и моменту инерціи тѣла, опредѣлить ту угловую скорость, которую тѣло получитъ послѣ удара, и обратно, зная приращеніе угловой скорости за время удара и моментъ инерціи тѣла, мы можемъ опредѣлить моментъ импульса, который называютъ иногда "импульсивнымъ моментомъ".

Въ частномъ случаѣ, когда тѣло до удара находится въ покоѣ ($\omega_0=0$), мы съ помощью уравненія (11) можемъ опредѣлить тотъ импульсивный моментъ, который нужно приложить, чтобы сообщить тѣлу угловую скорость ω_1: - онъ будетъ, очевидно, равенъ $\mathcal{M}\rho^2\omega_1$.

Перейдемъ къ опредѣленію того *удара, который испытываетъ ось* при данномъ импульсѣ.

Ось вращенія примемъ за ось OZ, ось OX направимъ по той прямой, по которой располагается кратчайшее разстояніе между осью вращенія и даннымъ импульсомъ.

За точку приложенія импульса беремъ точку P (p, 0, 0), въ которой импульсъ пересѣкаетъ ось OX (черт. 110).

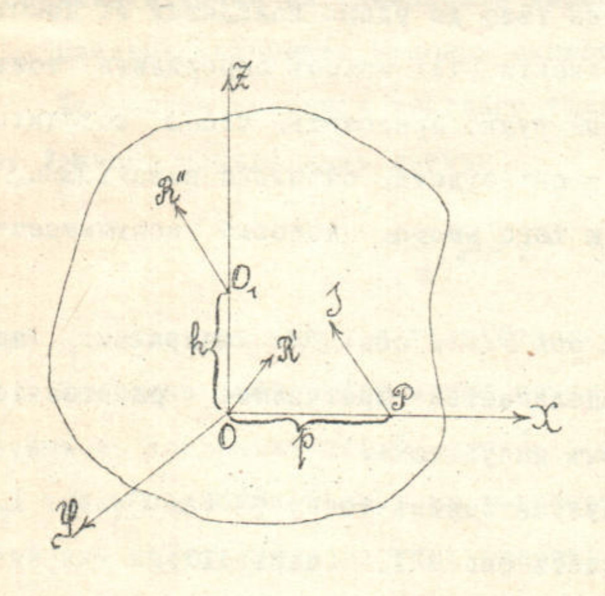
Обозначимъ проекціи силы, соотвѣтствующей разсматриваемому импульсу черезъ $X=0$, Y, Z; тогда уравненія движенія центра инерціи представятся въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} M x_c'' &= X' + X'', \\ M y_c'' &= Y + Y' + Y'', \\ M z_c'' &= Z + Z' + Z'' = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

а уравненія моментовъ въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i y_i' &= -h\, Y', \\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i x_i' &= -p Z + h X, \\ M \rho^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= p Y. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

X', Y', Z' обозначаютъ здѣсь проекціи реакціи R' въ точкѣ O, а X'', Y'', Z'' проекціи реакціи R'' въ точкѣ O_1.



Чертежъ 110.

Послѣднимъ изъ уравненій (13) мы уже пользовались выше.

Умножимъ обѣ части каждаго изъ уравненій (13) и (12) на dt и проинтегрируемъ въ предѣлахъ отъ t_0 до t_1. Вводя слѣдующія сокращенныя обозначенія для проекцій импульсовъ реакцій въ точкахъ O и O_1:

$$\int_{t_0}^{t_1} X' dt = a',$$

$$\int_{t_0}^{t_1} Y' dt = b',$$

$$\int_{t_0}^{t_1} Z' dt = c',$$

$$\int_{t_0}^{t_1} X'' dt = a'',$$

$$\int_{t_0}^{t_1} Y'' dt = b'',$$

$$\int_{t_0}^{t_1} Z'' dt = c'',$$

мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned} M.\left[(x'_c)_1 - (x'_c)_0\right] &= a' + a'', \\ M.\left[(y'_c)_1 - (y'_c)_0\right] &= b' + b'', \\ 0 &= \mathfrak{J}_x + c' + c''; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (12')$$

и

$$\left.\begin{aligned} \sum m_i z_i\left[(y'_i)_1 - (y'_i)_0\right] &= h.b'', \\ \sum m_i z_i\left[(x'_i)_1 - (x'_i)_0\right] &= -p.\mathfrak{J}_z + h.a'', \\ M.\rho^2(\omega_1 - \omega_0) &= p.\mathfrak{J}_y, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (13')$$

гдѣ $\mathfrak{J}_x = 0$, $\mathfrak{J}_y$, $\mathfrak{J}_z$ суть проекціи даннаго импульса, приложеннаго въ точкѣ $\mathfrak{P}$.

Такъ какъ при вращеніи тѣла около оси вообще

$$x'_i = -y_i\omega,$$

$$y'_i = x_i\omega,$$

а въ частности:

$$x'_c = -y_c\omega,$$

$$y'_c = x_c\omega,$$

то уравненія (12') и (13') мы можемъ переписать въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} M\cdot y_c(\omega_1-\omega_0) &= a'+a'', \\ M\cdot x_c\cdot(\omega_1-\omega_0) &= S_y+b'+b'', \\ 0 &= S_z+c'+c''; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12'')$$

$$\left.\begin{aligned} E\cdot(\omega_1-\omega_0) &= h\,b'', \\ D\cdot(\omega_1-\omega_0) &= -p\,S_z+h\,a'', \\ M\cdot\rho^2\cdot(\omega_1-\omega_0) &= p\cdot S_z, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13'')$$

гдѣ

$$D=\sum m_i y_i\cdot z_i,$$

и

$$E=\sum m_i x_i\cdot z_i,$$

центробѣжные моменты инерціи.

Зная $S_x=0$, S_y , S_z , затѣмъ h , D , E и положеніе центра тяжести (x_c , y_c) мы сначала съ помощью послѣдняго изъ уравненій (13") находимъ приращеніе угловой скорости: $\omega_1-\omega_0$, а подставляя найденное для него значеніе въ остальныя изъ уравненій (13") и уравненій (12"), найдемъ боковые удары на ось (a' a'', b' , b'') и сумму ударовъ по оси ($c'+c''$).

Выведемъ теперь условія, *необходимыя и достаточныя* для того, чтобы ось тѣла совершенно *не испытывала удара* въ то время, когда само тѣло ударъ получаетъ, т.е . чтобы:

$$a'=0\ ,\ a''=0,$$
$$b'=0\ ,\ b''=0,$$
$$c'+c''=0.$$

Изъ перваго изъ уравненій (12") слѣдуетъ, что для этого необходимо, чтобы

- это условіе выражаетъ, что центръ тяжести долженъ лежать въ плоскости ZOX , т.е. въ плоскости, проходящей черезъ ось перпендикулярно къ направленію удара.

Второе изъ уравненій (12") вполнѣ опредѣляетъ ту точку, въ которой ударъ долженъ быть тѣлу нанесенъ.

Въ самомъ дѣлѣ, это уравненіе требуетъ, чтобы:

$$M . x_c (\omega_1 - \omega_0) = S_y ,$$

но

$$\omega_1 - \omega_0 = \frac{p . S_y}{M . \rho^2} ;$$

слѣдовательно:

$$\frac{x_c . p}{\rho^2} = 1 ,$$

или

$$p = \frac{\rho^2}{x_c} ,$$

т.е. разстояніе p должно быть равно квадрату плеча инерціи тѣла относительно оси вращенія тѣла, раздѣленному на разстояніе центра тяжести тѣла отъ этой оси. Съ подобнымъ выраженіемъ мы уже встрѣчались, изучая колебаніе физическаго маятника: оно есть не что иное, какъ разстояніе между осью привѣса и осью качаній, т.е. приведенная длина физическаго маятника.

Третье изъ уравненій (12") требуетъ, чтобы $S_z = 0$, но такъ какъ и $S_x = 0$, то необходимо, чтобы $S_y = \pm S$, значитъ импульсъ S долженъ быть перпендикуляренъ къ плоскости XOZ , т.е. къ той плоскости, въ которой заключается ось вращенія и центръ тяжести.

Наконецъ, первыя два изъ уравненій (13") требуютъ, чтобы центробѣжные моменты инерціи D и E были нули, т.е., чтобы ось вращенія была главною осью инерціи тѣла въ точкѣ O.

Всѣ перечисленныя условія необходимы, но они и *достаточны*, потому что, если они удовлетворяются, то

$$a' = 0 \quad , \quad a'' = 0 \, ,$$
$$b' = 0 \quad , \quad b'' = 0 \, ,$$
$$c' + c'' = 0 \, .$$

Итакъ, для того, чтобы ось вращенія не испытывала удара, *необходимы и достаточны* слѣдующія три условія:

1) Ударъ долженъ быть направленъ перпендикулярно къ плоскости, проведенной черезъ ось вращенія и центръ тяжести тѣла;

2) ударъ долженъ быть расположенъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси вращенія и пересѣкающей эту ось въ такой точкѣ O, для которой ось вращенія есть главная ось инерціи тѣла, и 3) разстояніе удара отъ оси вращенія должно равняться разстоянію отъ этой оси, какъ оси привѣса, до соотвѣтствующей оси качаній.

Точка приложенія удара P въ этомъ случаѣ называется *центромъ удара*.

Выведенныя три условія принимаются во вниманіе при устройствѣ молотовъ.

Примѣръ. Баллистическій маятникъ.

Баллистическій маятникъ - это приборъ, служащій для измѣренія скорости снаряда.

Онъ состоитъ изъ пріемника (цилиндра, открытаго со стороны одного изъ основаній), наполненнаго землей и подвѣшеннаго при посредствѣ рамы къ горизонтальной оси, вокругъ которой онъ можетъ вращаться (черт. 111). Снарядъ, вступающій въ пріемникъ, производитъ отклоненіе маятника, по величинѣ котораго нетрудно найти *скорость* снаряда.

Введемъ обозначенія:

$M.k^2$ - моментъ инерціи маятника относительно оси вращенія;

l - разстояніе центра тяжести маятника отъ оси вращенія;

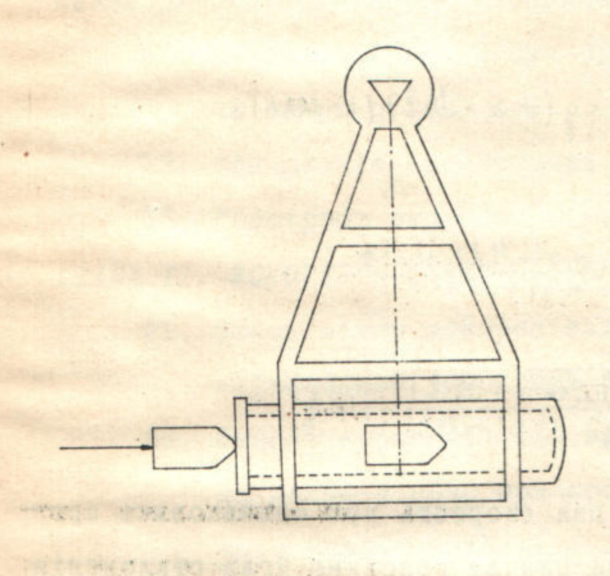
m - масса снаряда;

v - скорость, съ которою снарядъ вступаетъ въ цилиндръ;

a - разстояніе центра тяжести снаряда отъ оси;

ω - угловая скорость, которую получаетъ маятникъ, выведенный изъ состоянія покоя вслѣдствіе удара снаряда;

α - уголъ наибольшаго отклоненія маятника.



Чертежъ 111.

Количества движенія снаряда въ началѣ и въ концѣ удара равны соотвѣтственно $m.v$ и $m.a.v_1$, слѣдовательно, импульсъ, который снарядъ сообщаетъ маятнику, равенъ:

$$J = m.v - m.a.\omega ,$$

а моментъ этого импульса равенъ:

$$m.a.v - m.a^2.\omega .$$

Моментъ количества движенія самого маятника, который въ началѣ удара имѣлъ скорость нуль, а въ концѣ получилъ угловую скорость ω, послѣ удара будетъ, очевидно, $M.k^2.\omega$.

Приращеніе момента количества движенія, которое получилъ маятникъ, должно быть равно моменту импульса:

$$M.k^2.\omega = m.a.v - m.a^2.\omega ,$$

откуда

$$v = \frac{M.k^2 + ma^2}{m.a}.\omega \qquad (14)$$

Выразимъ угловую скорость ω черезъ уголъ отклоненій α, пользуясь закономъ живой силы.

Сила здѣсь дѣйствующая, именно, сила тяжести, имѣетъ потенціалъ, слѣдовательно, приращеніе живой силы равно разности значеній силовой функціи въ концѣ и въ началѣ удара:

$$-\left[\frac{1}{2} m.a^2.\omega^2 + \frac{1}{2}.M.k^2.\omega^2\right] = mg.a.\cos\alpha - M.g.l.\cos\alpha - m.g.a, - M.g.l,$$

или

$$\frac{1}{2}\cdot\omega^2.(m.a^2 + M.k^2) = g.(m.a + M.l).(1-\cos\alpha);$$

откуда:

$$\omega^2 = \frac{4.g.(m.a + M.l).\sin^2\frac{\alpha}{2}}{m.a^2 + M.k^2},$$

и

$$\omega = 2.\sqrt{\frac{g.(m.a + M.l)}{m.a^2 + Mk^2}}.\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что угловая скорость при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ пропорціональна синусу половины угла отклоненія маятника.

Такимъ образомъ:

$$v = \frac{2.(m.a + M.l)}{m.a}.\sqrt{a.g}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Нетрудно видѣть, что первыя два условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы ось нашего маятника не испытывала удара, выполняются всегда; третье же условіе требуетъ, чтобы

$$\frac{k^2}{l} = a \qquad \text{или} \qquad a.l = k^2.$$

Если и это условіе выполнено, тогда скорость v выразится слѣдующимъ образомъ:

$$v = \frac{2}{m.a}\sqrt{g.(m.a + M.l).(m.a^2 - M.k^2)}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

ОГЛАВЛЕНІЕ.

КИНЕМАТИКА.

Стр.

Стр.

КИНЕТИКА.

(Динамика точки)

Стр.

Стр.

Стр.

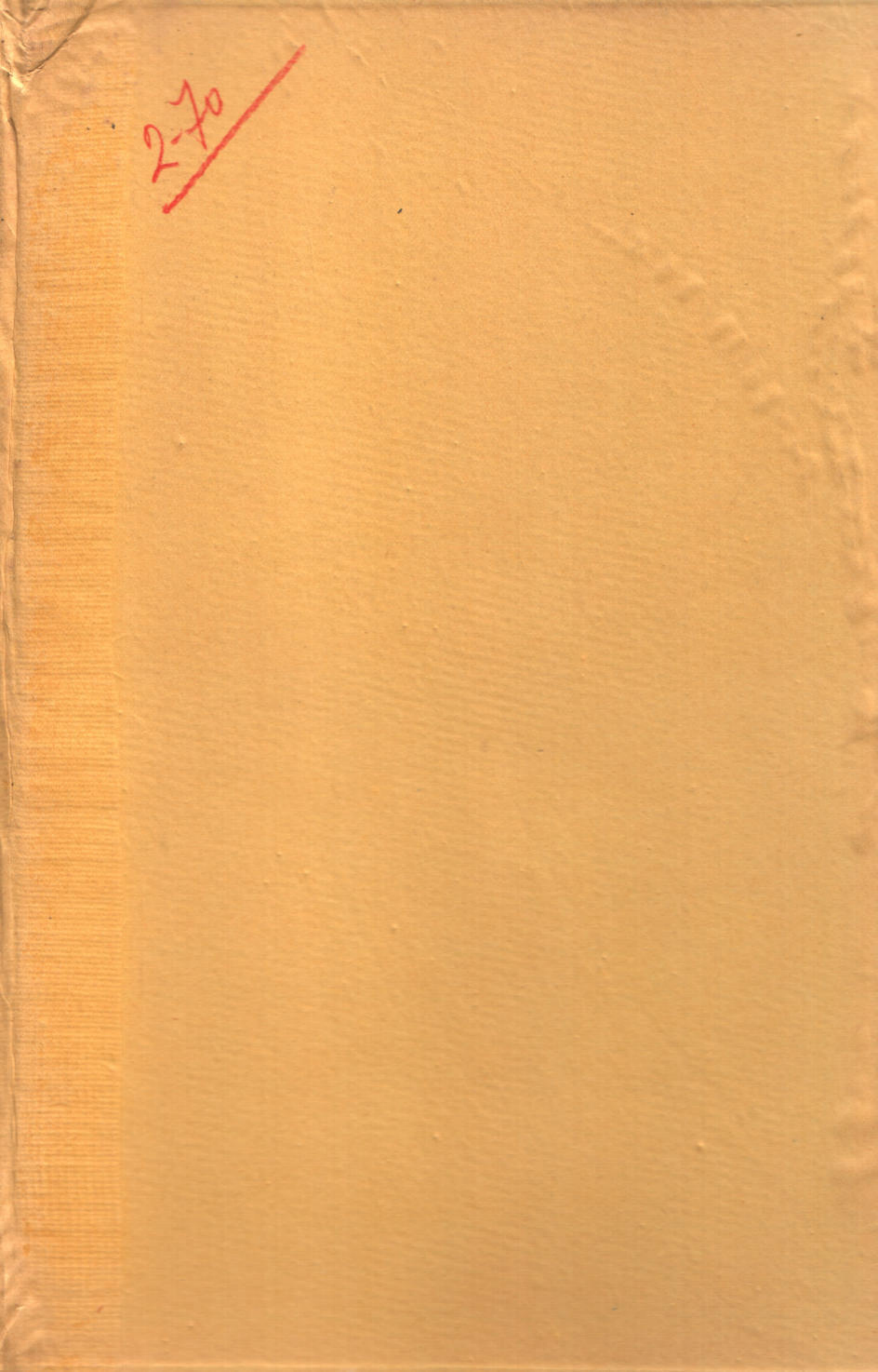
Стр.

Стр.

КИНЕТИКА СИСТЕМЫ ТОЧЕКЪ.

Стр.

Стр.


2-70